Задачи к курсе лекций
***Алгоритмические задачи теории графов*, А. Ромащенко,**
мехмат МГУ, весенний семестр, 2011.

Задача 1: Докажите теорему Пинскера: Существует такое $\delta > 0$, что для всех $d \geq 3$, для всех достаточно больших чётных n существует $[n, d, \delta]$-экспандер с правильной d-раскраской рёбер.

Указание: Докажите, что случайно выбранный граф с большой вероятностью является экспандером.

Задача 2: Найдете все собственный числа полного графа с n вершинами (а) без петель; (б) с петлями.

Задача 3: Докажите, что вершины алгебраического $[n, d, \alpha]$-экспандера нельзя раскрасить менее чем в $1/\alpha$ цветов так, чтобы никакие смежные вершины не были покрашены в один цвет.

Задача 4: Пусть граф $G = (V, E)$ является алгебраическим (n, d, α)-экспандером, $B \subset V$. Докажите, что

$$\sum_{v \in V} \left(|\Gamma(v) \cap B| - \frac{d|B|}{n} \right)^2 \leq (\alpha d)^2 |B| (1 - |B|/n).$$

Задача 5: Покажите, что для любого n конструкция из лекции 4 позволяет построить экспандер с параметрами $[N, 12, \delta]$ для некоторого N, удовлетворяющего

$$n \leq N \leq O(n \log n).$$

Указание: Воспользуйтесь свободой в выборе параметра r.

Задача 6: Покажите, что для построенного в лекции 5 графа G_n существует алгоритм, который по заданным номерам i, j за время $\mathrm{poly}(n)$ на зоне $O(n)$ проверяет наличие или отстутствие в G_n ребра между вершинами с номерами i и j.

Указание: Нужно свести задачу о графе G_n к задаче о графе G_{n-1} и описать получившийся рекурсивный алгоритм.

Задача 7: Пусть G является алгебраическим экспандером с параметрами $[n, d, \alpha]$, и $B_0, \ldots, B_k$ — некоторые множества вершин. Обозначим $\beta_i = |B_i|/2^n$. Рассмотрим процесс случайного блуждания по графу $v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_k$ (как всегда, первая вершина v_0 выбирается равномерно среди всех вершин графа, затем каждая следующая вершина v_{i+1} получается из предыдущей вершины v_i переходом по случайно выбранному ребру). Докажите, что

$$\mathrm{Prob}[v_i \in B_i \text{ для всех } i] \leq \prod_{i=1}^{k-1} (\sqrt{\beta_i \beta_{i+1}} + \alpha)$$

Задача 8: Докажите, что машину с памятью S, использующую R случайных битов, можно ε-обмануть вычислимым за полиномиальное время генератором $PRG : \{0,1\}^{S \log \frac{R}{S}} \to \{0,1\}^R$ для $\varepsilon = 2^{-S}$ (таким образом, размер зерна построенного нами генератора можно немного уменьшить по сравнению с доказательством, разобранном на лекции).

Задача 9: Рассмотрим следующий вероятностный алгоритм построения случайного n-битного простого числа. Выберем случайное число из интервала $[2^{n-1}...2^n - 1]$. Проверим его на простоту с помощью теста Миллера–Рабина. Если тест признал число простым, заканчиваем работу; в противном случае выбираем новое случайное число, и т.д. Если после n^3 итераций простое число не найдено, выдаём сообщение об ошибке. Покажите, что данный алгоритм выдаёт простое число с вероятностью $> 1 - 2^{-n}$ (с малой вероятностью алгоритм останавливается с сообшением об ошибке или выдаёт составное число). Сколько случайных битов использует данный алгоритм? Покажите, что случайные биты можно заменить на псевдослучайные, производимые генератором Нисана с зерном размера $O(n \log n)$; при этом вероятность ошибки алгоритма не будет превосходить $2 \cdot 2^{-n}$.

Комментарий: На лекции мы обсуждали аналгичный алгоритм, в котором вместо вероятностного теста Миллера–Рабина использовался детерминированный тест на простоту AKS. Хотя оба алгоритма полиномиальные, на практике тест Миллера–Рабина работает значительно быстрее.

Задача 10: Пусть вероятностная машина Тьюринга с рабочей лентой размера $O(\log n)$, использует n случайных битов и может $k = O(\log^c n)$ раз возвращаться к началу чтения последовательности случайных битов. Докажите, что существует полиномально вычислимый генератор

$$\mathrm{PRG} : \{0,1\}^{\log^d n} \to \{0,1\}^n$$

(для некоторой константы d), который $(1/n)$-обманывает эту машину.

Задача 11: В трёх рассмотренным нами примерах (тестирование двудольности, k-раскрашиваемости и отсутствия треугольников), алгоритмы тестирования свойств существенно использовали случайность. Докажите, что эта особенность тестов неустранима: не существует *детерминированных* алгоритмов тестирования свойств двудольности, k-раскрашиваемости или отсутствия треугольников, которые задаёт оракулу $O(1)$ вопросов.

Задача 12: Докажите корректность стандартного алгоритма тестирования графа на двудольность с помощью леммы Семереди о регулярности.

Задача 13: Докажите корректность стандартного алгоритма тестирования графа на 3-раскрашиваемость с помощью леммы Семереди о регулярности.