МФТИ, бакалавриат ФИВТ. 2014.
Упражнения к первой части курса
***Введение в теорию информации.* А.Е. Ромащенко**

1. Докажите, что для любых совместно распределённых случайных величин выполнены неравенства

a) $2H(a,b,c) \le H(a,b) + H(a,c) + H(b,c \mid a)$,
b) $H(a,b,c) + H(a) \le H(a,b) + H(a,c)$,
c) $H(c \mid d) \le H(c \mid a) + H(c \mid b) + I(a:b \mid d)$.

2. Докажите, что неравенство

$$2H(a,b,c) \le H(a,b) + H(a,c \mid b) + H(b,c \mid a)$$

выполнено не для всех троек случайных величин.

3. (a) Существует ли такое распределение вероятностей для тройки (a,b,c), что $I(a;b) = 0$ и $I(a;b \mid c) > 0$? (b) Существует ли такое распределение вероятностей для тройки (a,b,c), что $I(a;b) > 0$ и $I(a;b \mid c) = 0$?

4. Пусть последовательность случайных величин $a - b - c$ образует цепь Маркова. Докажите, что $I(a;c) \le I(a;b)$ и $I(a;c) \le I(b;c)$.

5. Пусть последовательность случайных величин $a - b - c - d$ образует цепь Маркова. Докажите, что $I(a;d) \le I(b;c)$.

6. Пусть энтропия случайной величины a равна n, а взаимная информация пар a и b, а также a и c больше $3n/4$. Докажите, что взаимная информация b и c больше $n/2$.

7. Случайные функции a и b принимают значения в 3-элементном множестве, и $a = b$ с вероятностью $2/3$. Докажите, что $H(a \mid b) < 4/3$.

8. Сколько нужно взвешиваний на чашечных весах, чтобы найти среди 40 монет одну фальшивую, отличающуюся от настоящих по весу (узнавать относительный вес фальшивой монеты не требуется).

9. Имеется набор из n камней. С помощью чашечных весов без гирь можно сравнить по весу любые два камня. Сколько необходимо взвешиваний, чтобы найти одновременно самый тяжелый и самый легкий камень?

10. Приведите пример распределения вероятностей, для которого код Шеннона–Фано не является оптимальным.

11. Рассмотрим задачу разделение секрета для следующей структуры доступа с 4 участниками: минимальными группами участников, знающих секрет, являются четыре пары

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}.$$

Докажите, что для данной структуры доступа невозможно идеальное разделение секрета.

12. Докажите, что энтропийный профиль

$$\begin{aligned}
&H(a \mid b,c) = H(b \mid a,c) = H(c \mid a,b) = 0,\\
&I(a;b \mid c) = I(a;c \mid b) = I(b;c \mid a) = k,\\
&I(a;b;c) = -k,
\end{aligned}$$

может быть реализован некоторым распределением (a,b,c), если и только если $k = \log N$ для некоторого целого N.

13*. Пусть для некоторого распределения (a,b,c)

$$I(a;b \mid c) = I(a;c \mid b) = I(b;c \mid a) = 0.$$

Докажите, что найдётся такая случайная величина d, что $H(d) = I(a;b;c)$, и a,b,c независимы относительно d (т.е., у тройки a,b,c можно “выделить” взаимную информацию).

14*. Имеется некоторое совместное распределение случайных величин (a, b, c, x, y). Известно, что

$$I(a; b \mid c) = I(a; c \mid b) = I(b; c \mid a) = 0.$$

Докажите, что в таком случае выполнено неравенство

$$I(a; b) \leq I(a; b \mid x) + I(a; b \mid y) + I(x; y).$$