ФИВТ МФТИ, весна 2014.

А.Е. Ромащенко.

Краткие заметки по курсу *Математическая логика и терия алгоритмов* для специальности ПМИ.

Часть четвертая: арифметическая иерархия и теорема Гёделя о неполноте.

Заметки написаны для студентов, слушавших лекции курса и посещавших семинары на факультете ИВТ Физтеха. Текст непригоден для использования в качестве самостоятельного учебного пособия, независимого от занятий.

1 Арифметическая иерархия

Определение 1 *Говорят, что множество $A \subset \mathbb{N}^k$ принадлежит классу Σ_n, если существует такое разрешимое множество $R \in \mathbb{N}^{k+n}$, что*

$$(x_1, \ldots, x_k) \in A \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \ [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R].$$

(*кванторы по переменным y_i чередуются, начиная с квантора существования; квантор $\mathcal{Q}$ по переменной y_n будет квантором существования или всеобщности, в зависимости от чётности числа n*).

Аналогично, говорят, что множество $A \subset \mathbb{N}^k$ принадлежит классу Π_n, если существует такое разрешимое множество $R \in \mathbb{N}^{k+n}$, что

$$(x_1, \ldots, x_k) \in A \leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \ [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R].$$

Согласно этому определению $\Sigma_0 = \Pi_0$ (классы Σ_0 и Π_0 совпадают с классом всех разрешимых множеств).

Утверждение 1 *Множество A принадлежит классу Σ_n, если и только если его дополнение $\bar{A}$ принадлежит классу Π_n.*

Доказательство: Если A принадлежит классу Σ_n, то существует такое разрешимое множество R, что

$$(x_1, \ldots, x_k) \in A \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \ [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R].$$

Следовательно, для дополнения этого множества

$$\begin{array}{rcll} (x_1, \ldots, x_k) \in \bar{A} & \leftrightarrow & \neg & \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \ [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R] \\ & \leftrightarrow & & \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots \bar{\mathcal{Q}} y_n \ [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \notin R] \end{array}$$

(где $\bar{\mathcal{Q}}$ обозначает квантор противоположный к $\mathcal{Q}$). Утверждение доказано.

Утверждение 2 *Множество A принадлежит классу Σ_1, если и только если A перечислимо.*

Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно, не заглядывая в конспект лекций. В случае затруднений см. Теорему 3 в [1]

Отметим, что из Утверждения 1 и Утверждения 2 следует, что класс Π_1 состоит из всех *коперечислимых* множеств (множеств, являющихся дополнениями к перечислимым).

Утверждение 3 *Определение классов Σ_n и Π_n не измениться, если в них разрешить формулы с произвольным числом кванторов и ограничить только число* чередований *кванторов. Более точно, множество $A \subset \mathbb{N}^k$ принадлежит Σ_n, если его можно задать формулой вида*

$$(x_1,\ldots,x_k) \in A \leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\exists y_1 \ldots \exists y_{k_1}}_{\exists\text{-кванторы}} \underbrace{\forall y_{k_1+1} \ldots \forall y_{k_1+k_2}}_{\forall\text{-кванторы}} \underbrace{\exists y_{k_1+k_2+1} \ldots \exists y_{k_1+k_2+k_3}}_{\exists\text{-кванторы}} \ldots\ldots}_{n \text{ групп одноименных кванторов}} [(x_1,\ldots,y_1,\ldots) \in R]$$

для некоторого разрешимого множества R. Аналогично, множество A принадлежит классу Π_n, если его можно задать формулой вида

$$(x_1,\ldots,x_k) \in A \leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\forall y_1 \ldots \forall y_{k_1}}_{\forall\text{-кванторы}} \underbrace{\exists y_{k_1+1} \ldots \exists y_{k_1+k_2}}_{\exists\text{-кванторы}} \underbrace{\forall y_{k_1+k_2+1} \ldots \forall y_{k_1+k_2+k_3}}_{\forall\text{-кванторы}} \ldots\ldots}_{n \text{ групп одноименных кванторов}} [(x_1,\ldots,y_1,\ldots) \in R]$$

для некоторого разрешимого R.

Для доказательства этого утверждения нужно воспользоваться вычислимым *кодированием* кортежей натуральных чисел: каждую группу идущих подряд одноименных кванторов кванторов $\exists y_1 \ldots \exists y_{k_1}$ можно заменить на квантор по одной единственной переменной $\exists z$, где z будет интерпретируется как *код* кортежа $\langle y_1 \ldots y_{k_1}\rangle$. При этом потребуется соответствующим образом подправить определение множества R. Попробуйте восстановить полное доказательство этого утверждения самостоятельно, не заглядывая в конспект лекций.

Семейство всех классов Σ_n и Π_n называют *арифметической иерархией*. Смысл слова «иерархия» становится ясным из следующего утверждения (в котором мы докажем, что классы Σ_n и Π_n для меньших n содержатся в соответствующих классах с большими номерами n).

Утверждение 4 *Для каждого $n \geq 0$*

$$\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1},\ \Pi_n \subset \Pi_{n+1},\ \Sigma_n \subset \Pi_{n+1},\ \Pi_n \subset \Sigma_{n+1}.$$

Доказательство: Множество A из класса Σ_n можно задать формулой вида

$$(x_1, \ldots, x_k) \in A \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \; [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R].$$

Добавляя фиктивный квантор по переменной y_{n+1}, мы можем написать

$$(x_1, \ldots, x_k) \in A \leftrightarrow \forall y_{n+1} \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \; [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R]$$

или

$$(x_1, \ldots, x_k) \in A \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \bar{\mathcal{Q}} y_{n+1} \; [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R],$$

откуда видно, что A принадлежит классам Π_{n+1} и Σ_{n+1}. Вложения $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ и $\Pi_n \subset \Sigma_{n+1}$ доказываются аналогично.

Как мы увидим ниже, все вложения в Утверждении 4 являются строгими.

2 Вычисления с оракулом

На лекциях мы дали определение вычисления с *оракулом.* Пусть $\mathcal{F} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ произвольная (возможно, невычислмая) функция. Напомним, что машина Тьюринга с оракулом $\mathcal{F}$ имеет дополнительную (оракульную) ленту и имеет следующую дополнительную возможность: машина может обращаться с запросом к оракулу и (за один шаг) узнавать, значение функции $\mathcal{F}$ на входе z, записанном в данный момент на оракульной ленте. После каждого запроса значение $\mathcal{F}(z)$ немедленно появляется на той же оракульной ленте.

При изучении вычислений с оракулами бывает удобно ограничиться рассмотрением функций $\mathcal{F}$, являющихся характеристическими функциями множеств. При этом часто допускают вольность речи и отождествляют множество $\mathcal{O}$ и соответствующий ему оракуом $\chi_{\mathcal{O}}$. (Подчеркнём ещё раз, что множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{N}$ может быть неразрешимым.)

Таким образом, для каждого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{N}$ у нас возникает новое (как говорят, «релятивизованное») определение алгоритма. Мы можем говорить о функциях, *вычислимых с оракулом* $\mathcal{O}$ (функция вычислима с оракулом $\mathcal{O}$, если существует машина с этим оракулом, которая для каждого входа из области определения функции находит её значение и останавливается, а для входов, не принадлежащих области значения, не останавливается), о множествах, *разрешимых с оракулом* $\mathcal{O}$ (множество разрешимо с оракулом $\mathcal{O}$, если её характеристическая функция вычислима с этим оракулом), о множествах, *перечислимых с оракулом* $\mathcal{O}$ (множество перечислимо с оракулом $\mathcal{O}$, если её полухарактеристическая функция вычислима с оракулом $\mathcal{O}$), и т.д.

Отметим, что все теоремы о вычислимости из нашего курса выдерживают «релятивизацию»: теоремы о существовании невычислимых функций и о перечислимых неразрешимых множествах, теорема Райса–Успенского, теорема Клини, и т.д. останутся верными, если в их формулировках заменить «алгоритмы» и «вычисления» на алгоритмы и вычисления с некоторым оракулом $\mathcal{O}$. При этом не нужно изобретать новые доказательства для «релятивизованных» теорем — все известные нам доказательства почти дословно переносятся на вычисления с оракулом.

Определение 2 *Говорят, что множество A сводится по Тьюрингу к множеству B, если A разрешимо с оракулом B. Обозначение: $A \leq_T B$.*

Утверждение 5 *Для сводимости по Тьюрингу выполнены следующие свойства:*

- *любое множество A сводится по Тьюрингу к самому себе: $A \leq_T A$,*
- *любое множество A сводится по Тьюрингу к своему дополнению, т.е., $A \leq_T \bar{A}$,*
- *если A разрешимо, то для любого B выполнено $A \leq_T B$,*
- *если $A \leq_T B$ и B разрешимо, то A тоже разрешимо,*
- *если $A \leq_T B$ и $B \leq_T C$, то $A \leq_T C$,*
- *если $A \leq_m B$, то $A \leq_T B$.*

Попробуйте воспроизвести доказательства всех этих свойств сводимости по Тьюрингу самостоятельно, не обращаясь к конспекту. В случае затруднений можно обратиться к главе 7 [1].

Как обычно, мы обозначаем $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ стандартную нумерацию программ для машины Тьюринга с оракулом. Используя вычислимость с оракулом, мы можем по индукции определить следующую бесконечную последовательность множеств, возрастающей «неразрешимости»:

0. обозначим $\mathbf{0}$ пустое множество,
1. обозначим $\mathbf{0}'$ множество $\{n \mid \text{машина } p_n \text{ останавливается на входе } n\}$,
2. обозначим $\mathbf{0}''$ множество $\{n \mid \text{машина } p_n \text{ с оракулом } \mathbf{0}' \text{ останавливается на входе } n\}$,

   $\ldots$

k. обозначим $\mathbf{0}^{(k)}$ множество $\{n \mid \text{машина } p_n \text{ с оракулом } \mathbf{0}^{(k-1)} \text{ останавливается на входе } n\}$,

   $\ldots$

где p_n есть n-ая программа для машины Тьюринга в стандартной нумерации.

Теорема об арифметической иерархии следует из следующего утверждения:

Теорема 1 *Для каждого натурального числа $k > 0$ множество $\mathbf{0}^{(k)}$ принадлежит классу Σ_k, но не принадлежит Σ_{k-1}.*

На лекциях мы не доказывали эту теорему, и в программу экзамена доказательство не входит. Однако вы можете прочитать это доказательство в [1].

Из Теоремы 1 немедленно вытекает, что для каждого n класс Σ_n является собственным подмножеством Σ_{n+1} (поскольку существует множество, лежащее в Σ_{n+1}, но не лежащее в Σ_{n+1}). Таким образом, мы получаем теорему об иерархии:

Теорема 2 (теорема об арифметической иерархии) $\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$ *для каждого n.*

Следствие 1 (теорема об арифметической иерархии) $\Sigma_n \neq \Pi_n$ *для каждого $n > 0$.*

Попробуйте вспомнить доказательство данного следствия, не заглядывая в свои записи.

3 Арифметические множества

Напомним, что язык первого порядка формальной арифметики содержит константу 0, один одноместный функциональный символ S и два двухместных функциональных символа $+$ и $\cdot$. Единственным предикатным символом языка является равенство. Носителем стандартной модели этого языка являются натуральные числа; при этом 0 интерпретируется как ноль, S как прибавление единицы, $+$ и $\cdot$ как обычное сложение и умножение соответственно.

С одной стороны, этот язык довольно прост. С другой стороны, он позволяет выразить многие важные понятия «финитной» математики.

3.1 Представимость в арифметике конечных последовательностей

Утверждение 6 *Существует арифметическая формула $Seq(x, y, z, w)$, которая представляет в языке арифметики все конечные последовательности натуральных чисел в следующем смысле: для любой последовательности натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ существуют такие натуральные числа a, b, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ формула Seq истинна на оценках, сопоставляющих свободным переменным x, y, z, w значения a, b, i, m_i соответственно, и ложна на оценках, сопоставляющих переменным x, y, z, w значения a, b, i, m' для любого $m' \neq m$.*

Прежде чем приступать к доказательству, отметим, что с помощью формулы Seq в языке арифметики можно «кодировать» все конечные последовательности натуральных чисел, При этом «кодом» последовательности

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ будет тройка чисел (a, b, n) (где n есть длина последовательности, а числа a и b задают члены этой последовательности в указанном выше смысле). Отметим так же, что для $i > n$ Утверждение 6 ничего не гарантирует относительно истинности Seq на наборах a, b, i, x.

Для доказательства Утверждения 6 нам понадобится следующая лемма из элементарной теории чисел.

Лемма 1 *Для любого n существует бесконечно много натуральных чисел b таких, что $b+1, 2b+1, \ldots, nb+1$ попарно взаимно просты.*

Доказательство леммы: Достаточно взять b кратным числу $n!$. В самом деле, предположим, что у чисел $ib+1$ и $jb+1$ (для $0 \leq i < j \leq n$) есть общий простой делитель p. Тогда разность этих двух чисел $(j-i)b$ тоже делится на p. Это значит, что p делит b или $j-i$. Далее, заметим, что если p делит разность $j-i$, то (поскольку $0 < j-i < n$) p должен делить и $n!$. Следовательно, число p в любом случае должно делить b. Но простое число p не может делить одновременно ib (кратное $n!$) и число $ib+1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство утверждения 6: Пусть задана последовательность натуральных чисел $m_1, \ldots, m_n$. Согласно Лемма 1, можно найти такое натуральное число b, которое больше всех n_i из заданной последовательности, и при этом числа $b+1, 2b+1, \ldots, nb+1$ попарно взаимно просты.

Далее, по *китайской теореме об остатках* найдётся такое число a, что для всех $i = 1 \ldots n$ при делении a на число $ib+1$ получается в остаток n_i. Вспомните формулировку и доказательство китайской теоремы об остатках!

Теперь мы можем «закодировать» последовательность $m_1, \ldots, m_n$ тройкой чисел a, b, n: каждое m_i определяется по правилу «взять остаток от деления a на $ib+1$». Остаётся записать формулу в языке арифметики, которая выражает это свойство. Это несложно. Мы хотим выразить свойство

$$a = (i \cdot b + 1) \cdot q + m_i,$$

где q есть неполное частное, а m_i остаток. Это значит, что

$$\exists q((a = (i \cdot b + 1) \cdot q + m_i) \ \& \ (m_i < (i \cdot b + 1)).$$

Поскольку в нашем языке формальной арифметики нет константы «один» и символа «меньше», мы должны прибегнуть к несложному трюку и переписать данное свойство в виде

$$\exists q((a = (i \cdot b + S(0)) \cdot q + m_i) \ \& \ (\exists t \ m_i + S(t) = i \cdot b)).$$

Таким образом, формулу $Seq(x, y, z, w)$ можно записать в виде

$$\exists q((x = (z \cdot y + S(0)) \cdot q + w) \ \& \ (\exists t \ w + S(t) = z \cdot y)).$$

Утверждение 6 доказано.

3.2 Представимость в арифметике и арифметическая иерархия

Теорема 3 *Для любой машины Тьюринга M можно построить такую арифметическую формулу $\varphi_M(x)$ (с одной свободной переменной x), что машина M останавливается на входе $1^{n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{n+1}$, если и только если $\varphi_M(x)$ истинна на оценках, сопоставляющих значение n переменной x.*

Замечание: аналогичное утверждение верно для машин с несколькими входами, а также для машин, получающий вход не в унарной, а в двоичной записи.

На лекции мы подробно обсуждали доказательство этой теоремы. Восстановите детали доказательства, пользуясь своими записями.

Определение 3 *Множество $A \subset \mathbb{N}^k$* представимо в арифметике, *если существует такая формула языка формальной арифметики $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ с k свободными переменными, что $(n_1, \ldots, n_k) \in A$, если и только если $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ истинна на оценках, сопоставляющих числа $n_1, \ldots, n_k$ параметрам $x_1, \ldots, x_k$.*

Упражнение: Докажите, что в арифметике представимы следующие множества: (а) множество всех чётных чисел, (б) множество всех степеней двойки, (в) множество всех простых чисел, (г) множество всех таких пар (n, m), где $n \leq m$.

Теорема 4 *Множество A является арифметическим, если и только если A лежит в одном из классов арифметической иерархии, т.е., в $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$.*

Доказательство: Импликацию в одну сторону доказать совсем просто: если множество арифметическое, то оно представляется некоторой формулой $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ в языке формальной арифметики. Приведем эту формулу к предваренной нормальной форме (вытащим наружу все кванторы). Тогда внутри останется бескванторная часть – булева комбинация равенств арифметических термов. Эти термы кроме свободных переменных $x_1, \ldots, x_k$ могут включать и некоторое количество связанных кванторами переменных, а также константу 0. Нетрудно видеть, что данная бескванторная часть является разрешимым свойством значений параметров: для каждого набора значений всех переменных мы можем вычислить значение каждого из термов, входящих в формулу, и выяснить, является ли вся эта (бескванторная) формула истинной или ложной. Таким образом, приведенная к предваренной нормальной форме $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ имеет вид

[кванторная приставка] (разрешимый предикат).

Понятно, что такая формула задаёт свойство класса Σ_n для некоторого (достаточно большого) n.

Для доказательства импликации в другую сторону нам нужна Теорема 3. Пусть некоторое множество A лежит в Σ_n. Это значит, что принадлежность к A можно выразить формулой

$$\exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \; [(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \in R],$$

для некоторого разрешимого множества R. Поскольку R разрешима, существует машина Тьюринга M, которая получает на вход набор из $k+n$ натуральных чисел и останавливается в том и только том случае, когда этот набор принадлежит R. По существу, мы здесь пользуемся даже не разрешимостью, а перечислимостью множества R. По Теореме 3 существует арифметическая формула $\varphi_M(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$, которая истинна ровно на тех наборах натуральных чисел, на которых машина M останавливается (т.е., на тех наборах, которые принадлежат множеству R). Остаётся приписать к этой формуле кванторную приставку: принадлежность к A выражается арифметической формулой

$$\exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots \mathcal{Q} y_n \; \varphi_M(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n).$$

Теорема доказана.

4 Системы аксиом для языков первого порядка

Определение 4 Системой аксиом *в языке первого порядка L называется произвольное разрешимое (возможно, бесконечное) множество формул данного языка.*

Важно, что система аксиом может состоять из бесконечного множества формул; мы требуем лишь разрешимости этого множества. Отметим, что данное определение является чисто синтаксическим, в нём ничего не говорится об интерпретации языка и тем более об истинности аксиом.

Говорят, что формула φ языка L выводится из системы аксиом $\mathcal{A}$ (*доказывается* в данной аксиоматической системе), если φ выводится из $\mathcal{A}$ в исчислении предикатов. Другими словами, существует такая последовательность формул $\psi_1, \ldots, \psi_n$, в которой каждая из формул либо является аксиомой исчисления предикатов, либо одной из формул $\mathcal{A}$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода исчисления предикатов (modus ponens или одному из правил Бернайса); при этом последняя формула ψ_n должна совпадать с формулой φ.

В дальнейшем мы будем рассматривать только языки первого порядка с равенством и будем считать, что аксиомы равенства включены в исчисление предикатов.

Утверждение 7 *Для любой системы аксиом $\mathcal{A}$ множество выводимых из неё формул перечислимо.*

Доказательство: Напомним, что *перечислимость* множества можно определять многими эквивалентными способами. В данном доказательстве удобнее всего использовать следующий вариант определения: множество перечислимо, если есть бесконечно долго работающий алгоритм, печатающий список, состоящий из всех элементов данного множества. Покажем, как построить алгоритм, печатающий список всех выводимых формул.

Мы можем алгоритмически перечислять конечные последовательности формул (например, в порядке возрастания суммы длин формул в такой последовательности). Для каждой последовательности формул можно проверить, является ли она выводом из $\mathcal{A}$ (тут мы пользуемся тем, что множество $\mathcal{A}$, а также множество аксиом исчисления предикатов разрешимы). Если очередная последовательность формул оказывается выводом из $\mathcal{A}$, мы добавляем последнюю формулу из этой последовательности к списку выводимых формул. Так мы рано или поздно перечислим каждую формулу, выводимую из данной системы аксиом.

5 Неразрешимость формальной арифметики и первая теорема Гёделя о неполноте

Теорема 5 *Множество замкнутых формул языка формальной арифметики, истинных в стандартной интерпретации, неразрешимо.*

Доказательство: Пусть $A \subset \mathbb{N}$ какое-нибудь перечислимое неразрешимое множество, и M машина, вычисляющая его полухарактеристическую функцию (останавливающаяся на входе 1^{n+1} в том и только том случае, когда $n \in A$). Из Теоремы 4 следует, что найдется такая арифметическая формула $\varphi_M(x)$ которая истинна на оценках, сопоставляющих параметру x одно из чисел множества A (число, на котором машина M останавливается), и ложна на оценках, сопоставляющих параметру x число из дополнения A (чисело, на котором машина M не останавливается). Таким образом, формула $\varphi_M(\underbrace{S(S \ldots S}_{n}(0)))$ истинна, если $n \in A$ и ложна, если $n \notin A$.

Теперь предположим, что множество истинных (в стандартной интерпретации) формул языка формальной арифметики разрешимо. Тогда существует алгоритм, который по формуле вида $\varphi(S(S \ldots S(0)))$ определяет, истинна она или ложна. С помощью этого алгоритма можно определить, принадлежит ли заданное число n множеству A. Но это противоречит неразрешимости множества A. Теорема доказана.

Теорема 6 (Первая теорема Гёделя о неполноте) *Не существует системы аксиом, из которой были бы выводимы все замкнутые формулы языка формальной арифметики, истинные в стандартной интерпретации, и не выводимо ни одной ложной (в стандартной интерпретации) замкнутой формулы.*

Доказательство: Пусть существует такая система аксиом $\mathcal{A}$, из которой выводимы все замкнутые формулы языка формальной арифметики, истинные в стандартной интерпретации, и не выводимо ни одной ложной. Это значит, что для истинных замкнутых формул φ из $\mathcal{A}$ можно вывести саму φ, а для ложных φ из $\mathcal{A}$ выводится $\neg\varphi$ (поскольку отрицание ложной формулы будет истинным).

Для любой системы аксиом множество выводимых формул перечислимо. Но это значит, что множество истинных замкнутых формул формальной арифметики должно быть разрешимым. В самом деле, чтобы узнать, истинна ли некоторая формула φ или ложна, мы запустим перечисление всех выводимых из $\mathcal{A}$ формул и будем ждать, пока в этом списке не появится φ или $\neg\varphi$.

Таким образом, мы пришли к выводу о разрешимости множества истинных замкнутых формул формальной арифметики. Но это противоречит Теореме 5. Теорема Гёделя доказана.

Список литературы

[1] Верещагин Н., Шень А. Вычислимые функции - М.: МЦНМО, 1999.

[2] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995.

[3] Верещагин Н.К, Плиско, В.Е., Успенский В.А. Вводный курс математической логики. М.: 1997.

[4] Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. - М.: КомКнига, 2006.

[5] Булос Дж., Джеффри Р. Вычилимость и логика. - М.: Мир, 1994.