Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Задачи для работы над ошибками к контрольной работе номер 1.

**1.** (а) Упорядочьте по возрастанию ординалы $(1+\omega)\cdot(\omega+2)\cdot(\omega+3)$, $(2+\omega)\cdot(1+\omega)\cdot(\omega+3)$, $(\omega+2)\cdot(3+\omega)\cdot(\omega+2)$, $(\omega+2)\cdot(3+\omega)\cdot(2+\omega)$, $\omega^3$, $\omega^{2^\omega}$, $\omega^{3^\omega}$. Укажите, какие из этих ординалов равны друг другу.

(б) Упорядочьте по возрастанию ординалы $(\omega+1)\cdot(2+\omega)\cdot(3+\omega)$, $(2+\omega)\cdot(\omega+1)\cdot(\omega+3)$, $(\omega+1)\cdot(3+\omega)\cdot(2+\omega)$, $(\omega+2)\cdot(3+\omega)\cdot(\omega+2)$, $\omega^2$, $\omega^{2^\omega}$, $\omega^{\omega^2}$. Укажите, какие из этих ординалов равны друг другу.

(в) Найдите в $\mathbb{R}$ (со стандартным линейным порядком) такие подмножества чисел, порядки на которых изоморфны $\omega+\omega+\omega$, $\omega^3$, $\omega^2+\omega+2$, $(\omega+1)\cdot(1+\omega)$.

(г) Найдите в $\mathbb{R}$ (со стандартным линейным порядком) такие подмножества чисел, порядки на которых изоморфны $2\cdot\omega$, $\omega\cdot 2$, $2+\omega+\omega+2$, $(\omega+1)^2+\omega^2$, $\omega\cdot(\omega+10)$.

**2.** (а) Найдите все предельные элементы ординала $\omega^\omega+\omega^3\cdot 3+\omega+3$.

(б) Найдите все предельные элементы ординала $\omega\cdot 2+\omega^\omega+(\omega+1)\cdot(1+\omega)+\omega$.

(в) Найдите все предельные элементы ординала $\omega^{\omega\cdot 3}+\omega^{3\cdot\omega}+3\cdot\omega+1$.

(г) Найдите все предельные элементы ординала $\omega^2+\omega^{\omega^2}+\omega^2$.

**3.** (а) Существует ли такое бесконечное множество $A$, которое *равномощно* объединению счетного семейства множеств $B_i$, каждой из которых имеет мощность меньше мощности $A$? Существует ли такое бесконечное множество $A$, которое *не равномощно* никакому объединению счетного семейства множеств $B_i$, каждой из которых имеет мощность меньше мощности $A$?

(б) Пусть $\mathbb{R}=\cup_{i=1}^{\infty}A_i$. Докажите, что хотя бы одно из множеств $A_i$ равномощно $\mathbb{R}$.

(в) Покажите, что существует счетная последовательность бесконечных ординалов $\alpha_i$, точная верхняя грань которой есть ординал $\alpha$ мощности большей, чем мощность каждого $\alpha_i$.

**4.** (а) Существует ли такой ординал $\alpha$, для которого $\omega^{\omega^\alpha}=\alpha$?

(б) Существует ли такой ординал $\alpha$, для которого $2^{3^\alpha}=\alpha$?

(в) Пусть $\alpha,\beta,\gamma$ ординалы, большие 0. Можно ли утверждать, что $(\beta\cdot\gamma)^\alpha=\beta^\alpha\cdot\gamma^\alpha$? (Докажите данное равенство или приведите контрпример.)

**5.** (а) Докажите, что $\mathbb{R}^3$ можно представить в виде объединения непересекающихся окружностей радиуса 1.

(б) Можно ли найти в $\mathbb{R}$ такое множество мощности континуум, которое (со стандартным линейным порядком на вещественных числах) является вполне упорядоченным.