Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий, ПМФ
Математическая логика, весна 2014
Задачи для работы над ошибками к контрольной работе номер 2.

1. (а) Существует ли невычислимая функция с конечной областью определения?

(б) Может ли композиция двух вычислимых всюду определённых функций $f\colon \mathbb{N} \to N$ и $g\colon \mathbb{N} \to N$ быть невычислимой?

(в) Может ли сумма $f+g$ двух вычислимых всюду определённых функций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ быть невычислима?

(г) Существует ли невычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, множество всех значений которой состоит из единственного числа $n \in \mathbb{N}$?

(д) Может ли подмножество неразрешимого множества быть разрешимым?

(е) Может ли подмножество разрешимого множества быть неразрешимым?

(ж) Во всяком ли множестве натуральных чисел есть разрешимое подмножество?

2. (а) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что множество S, состоящее из всевозможных конечных сумм элементов A (сумм вида $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$, где все a_i являются элементами A) также перечислимо.

(б) Докажите, что пересечение разрешимого и перечислимого множеств является перечислимым.

(в) Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо, а $B \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что $A \setminus B$ перечислимо.

(г) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что множество всех простых чисел,являющихся элементами множества A, также перечислимо.

(д) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что множество всех кратных всех элементов множества A разрешимо.

(е) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что множество всех делителей всех элементов множества A перечислимо.

(ж) Диофантовым уравнением называется уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любого диофантового уравнения множество всех (целочисленных) решений является перечислимым.

3. Пусть $U(n, x)$ является главной универсальной вычислимой функции.

(а) Докажите, что найдётся такое число n, что $U(n, x) = \text{НОД}(n, x)$ (наибольший общий делитель n и x) для всех $x \in \mathbb{N}$.

(б) Докажите, что найдётся такое число n, что

$$U(n, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ U(n, U(n, x-1)) + 2, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите $U(n, 10)$ для такого n.

(в) Докажите, что найдётся такое число n, что

$$U(n, x) = \begin{cases} U(n, U(n, x+1)), & \text{если } x \leq 10, \\ x + 3, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите $U(n, 10)$ для такого n.

(г) Докажите, что найдётся такое число n, что

$$U(n,x) = \begin{cases} U(n, U(n, x+3)), & \text{если } x \leq 20, \\ x-2, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите $U(n, 10)$ для такого n.

(д) Докажите, что существует набор попарно различных программ π_i, $i = 0, \ldots, 99$ на языке `C` (или на языке `Python`) таких, что каждая программа π_i на входе j печатает текст программы π_k для $k = i + j \bmod 100$.

(е) Докажите, что найдутся такие числа n_1, n_1, что $U(n_1, x) = x + 10n_2$ и $U(n_2, x) = x + 20n_1$ для всех чисел $x \in \mathbb{N}$.

4. (а) Является ли перечислимым множество номеров машин Поста (в стандартной нумерации), не останавливающихся ни на одном входе, являющемся двоичной записью простого числа? Дополнение этого множества?

(б) Является ли перечислимым множество номеров машин Поста (в стандартной нумерации), не определённых ни на одном слове нечётной длины? Дополнение этого множества?

(в) Является ли перечислимым множество номеров машин Тьюринга, вычисляющие всюду определённые биекции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$? Дополнение этого множества?

(г) Является ли множество номеров вычислимых функций $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (в стандартной нумерации), среди значений которых встречаются *все* натуральные числа , перечислимым? Дополнение этого множества?

(д) Является ли множество номеров вычислимых функций $\varphi_n : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ (в стандартной нумерации), множество значений которых состоит из конечного числа двоичных слов, перечислимым? Дополнение этого множества?

5. (а) Теорема Клини гарантирует, что для каждого вычислимого всюду определённого отображения $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ найдётся «неподвижная точка», т.е., такое число n, что машины Поста с номерами n и $f(n)$ (из стандартного перечисления машин Поста) вычисляют одну и ту же функцию. Приведите пример такого отображения f_1, для которого все неподвижные точки соответствуют машинам, вычисляющим одну и ту же функцию. Приведите пример такого отображения f_2, у которого есть хотя бы две неэквивалентные неподвижные точки.

(б) Обозначим $B(n)$ максимальное число шагов, которое может сделать до остановки машина Поста p_i на входе 0 для $i = 0, \ldots, n$ (мы берём максимум только по тем машинам Поста, которые останавливаются на входе 0). Докажите, что $B(n) > 2^{2^n}$ для всех достаточно больших n.

(в) Назовём слово $x \in \{0,1\}^*$ длины n *простым*, если существует программа для машины Поста с номером не более n (в стандартной нумерации), которая печатает слово x на пустом входе. Докажите, что множество всех простых слов перечислимо, но не является m-полным классе всех перечислимых множеств.