МФТИ, ФИВТ, 2008–2009.
Программа экзамена по курсу
Математическая логика и теория алгоритмов.
Д. Мусатов, А. Ромащенко.

1-ый семестр

1. **Логика высказываний**.

Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний.

Корректность исчисления высказываний.

Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний.

Противоречивые и непротиворечивые семейства формул. Теорема о компактности для пропозициональных формул.

2. **Языки первого порядка**.

Языки первого порядка: сигнатура, формулы с кванторами. Интерпретация языка первого порядка. Истинность формулы.

Выражение предикатов формулами первого порядка.

Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Примеры невыразимых прекдикатов.

Метод элиминации кванторов.

3. **Исчисление предикатов и теория моделей**.

Теории и модели. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка.

Исчисление предикатов. Примеры вывода.

Корректность исчисления предикатов.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.

Теорема Мальцева о компактности.

4. **Неклассические логики**.

Интуиционистское исчисление высказываний. Семантика Крипке.

Модальная логика. Системы аксиом для модальных логик. Семантика Крипке.

2-ой семестр

5. **Алгоритмы и вычислимые функции**.

Формальное определение алгоритма. Машины Тьюринга. Алгорифмы Маркова. Машины Минского. Тезис Чёрча.

Вычислимые функции. Существование невычислимых функций.

Разрешимые и перечислимые множества. Теорема Поста.

Нумерации вычислимых функций. Теорема Райса–Успенского.

Теорема Клини о неподвижной точке.

Вычисления с оракулом. Арифметическая иерархия.

6. **Вычислимость и формальная арифметика**.

Арифметическое представление разрешимых множеств (без доказательства).

Аксиоматическая теория арифметики Пеано. Первая теорема Гёделя о неполноте.

Теорема о неподвижной точке.Теорема Тарского.

Представление вычислимых функций в теории Пеано. Теорема о диагонализации для арифметических формул с одной свободной переменной.

Предикат доказуемости, лемма Гильберта–Бернайса (без доказательства). Теорема Лёба. Вторая теорема Гёделя о неполноте.

7. **Лямбда-исчисления**.

λ-исчисление: термы, α, β редукции. Понятие эквивалентности λ-термов, теорема Чёрча–Россера (без доказательства).

Y-оператор и теорема о неподвижной точке для λ-исчисления. Программирование с рекурсиями.

λ-исчисление как язык программирования: нумералы Чёрча, реализация простейших булевых и арифметических операторов.

8. **Теория множеств**.

Равномощность множеств. Теорема Кантора. Теорема Кантора–Бернштейна.

Фундированные и вполне упорядоченные множества. Трансфинитная рекурсия. Сравнимость любых вполне упорядоченных множеств.

Аксиома выбора. Теорема Цермело. Сравнимость мощности любой пары множеств.

Всякое бесконечное множество равномощно своему квадрату.

Основной список литературы.

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
2. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.
3. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.
4. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000.
5. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.
6. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
7. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.

Дополнительная литература.

1. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
2. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.