Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Задачи для работы над ошибками к контрольной работе номер 1.

1. (а) Упорядочьте по возрастанию ординалы $(1+\omega)\cdot(\omega+1)$, $(\omega+1)\cdot(1+\omega)$, $(\omega+1)^2$, ω^2, ω^3, ω^{2^ω}, ω^{3^ω}. Укажите, какие из этих ординалов равны друг другу.

(б) Упорядочьте по возрастанию ординалы $(1+\omega)\cdot(\omega+\omega)$, $(\omega+\omega)\cdot(1+\omega)$, $(\omega+1)\cdot\omega$, $(\omega+1)\cdot(\omega+1)$, ω^2, ω^{ω^2}, ω^{ω^3}. Укажите, какие из этих ординалов равны друг другу.

(в) Найдите в $\mathbb{R}$ (со стандартным линейным порядком) такие подмножества чисел, порядки на которых изоморфны $\omega+\omega+\omega$, ω^3, $\omega^2+\omega+2$, $(\omega+1)\cdot(1+\omega)$.

(г) Найдите в $\mathbb{R}$ (со стандартным линейным порядком) такие подмножества чисел, порядки на которых изоморфны ω^2, $1+\omega+\omega+1$, $(\omega+1)^2+\omega+2$, $\omega\cdot(\omega+10)$.

(д) Сравните ординалы $2^{\omega^2}+\omega^3+7$ и $\omega^3+2^{\omega^2}+7$; найдите в $\mathbb{R}$ (со стандартным линейным порядком) такие подмножества чисел, порядки на которых изоморфны этим ординалам.

(е) Сравните ординалы $\omega^{\omega^3}+\omega^4+2$ и $\omega^4+\omega^{\omega^3}+2$; найдите в $\mathbb{R}$ (со стандартным линейным порядком) такие подмножества чисел, порядки на которых изоморфны этим ординалам.

2. (а) Приведите пример такой счётной цепи ординалов попарно различных мощностей, предел которой есть ординал мощности большей, чем мощность каждого элемента цепи.

(б) Существует ли такое бесконечное множество A, которое *равномощно* декартову произведению счетного семейства множеств B_i, каждой из которых имеет мощность меньше мощности A? Существует ли такое бесконечное множество A, которое *не равномощно* никакому декартову произведению счетного семейства множеств B_i, каждой из которых имеет мощность меньше мощности A?

(в) Ординал $\alpha > 0$ называется аддитивно неразложимым, если для любых $\beta, \gamma < \alpha$ верно $\beta+\gamma < \alpha$. Докажите, что ординал α аддитивно неразложим тогда и только тогда, когда для любого $\gamma < \alpha$ верно $\gamma + \alpha = \alpha$.

(г) Ординал $\alpha > 0$ называется аддитивно неразложимым, если для любых $\beta, \gamma < \alpha$ верно $\beta + \gamma < \alpha$. Докажите, что все ординалы вида ω^α аддитивно неразложимы.

(д) Ординал $\alpha > 0$ называется мультипликативно неразложимым, если для любых ординалов $\beta, \gamma < \alpha$ верно $\beta\gamma < \alpha$. Докажите, что ординал $\alpha > 1$ мулитипликативно неразложим тогда и только тогда, когда для всех $\gamma < \alpha$ верно $\gamma\alpha = \alpha$.

(е) Могут ли два бесконечных вполне упорядоченных множества, имеющие порядковые типы α и 2^α соответственно, быть равномощными? Неравномощными?

3. (а) Найдите все предельные элементы ординала $\omega^{\omega+1}+\omega^3+\omega+3$.

(б) Найдите все предельные элементы ординала $\omega\cdot 2+\omega^\omega+(\omega+1)^3+\omega+2$.

(в) Найдите все предельные элементы ординала $\omega^{\omega\cdot 2}+\omega^{2\cdot\omega}+\omega+1$.

(г) Найдите все предельные элементы ординала $\omega^{\omega^2}+\omega+3$.

(д) Какие ординалы можно представить вполне упорядоченными подмножествами $\mathbb{Z}$ со стандартным порядком?

4. (а) Существует ли такой бесконечный ординал α, для которого $\alpha^2 = \alpha$?

(б) Существует ли такой ординал α, для которого $2^\alpha = \alpha$?

(в) Пусть α, β, γ такие ординалы, что $1 < \beta < \gamma$ и $\alpha > 0$. Можно ли утверждать, что $\beta^\alpha < \gamma^\alpha$? (Докажите данное неравенство или приведите контрпример.)

(г) Пусть $\omega < \alpha < \beta < \gamma$. Можно ли сравнить α^{β^γ} и α^{γ^β}? (Докажите нестрогое неравенство или приведите два примера со строгими неравенствами разных знаков)

(д) Пусть $\omega < \alpha < \beta < \gamma$. Можно ли сравнить α^{β^γ} и β^{γ^α}? (Докажите нестрогое неравенство или приведите два примера со строгими неравенствами разных знаков)

5. (а) Можно ли найти в $\mathbb{R}$ такое несчетное подмножество, которое (со стандартным линейным порядком на вещественных числах) является вполне упорядоченным.

(б) Всякое ли счетное вполне упорядоченное множество $(A, \leq)$ можно вложить в $\mathbb{R}$, т.е., найти такое подмножество $B \subset \mathbb{R}$, которое (со стандартным порядком на вещественных числах) изоморфно $(A, \leq)$.

(в) Все ли ординалы, представимые как подмножества $\mathbb{R}$ со стандартным порядком, представимы как подмножества $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком?