Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Задачи для работы над ошибками к контрольной работе номер 2.

1. (а) Может ли композиция двух вычислимых всюду определённых функций $f\colon \mathbb{N} \to N$ и $g\colon \mathbb{N} \to N$ быть невычислимой?

(б) Всякая ли функция с конечной областью определения вычислима?

(в) Верно ли, что сумма $f + g$ двух вычислимых всюду определённых функций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N} \to N$ тоже вычислима?

(г) Существует ли невычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to N$, множество всех значений которой состоит из единственного числа $n \in \mathbb{N}$?

(д) Может ли подмножество неразрешимого множества быть разрешимым?

(е) Может ли подмножество разрешимого множества быть неразрешимым?

(ж) Во всяком ли множестве натуральных чисел есть разрешимое подмножество?

2. (а) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что множество S, состоящее из всевозможных конечных сумм элементов A

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}$$

(все a_i являются элементами A) также перечислимо.

(б) Докажите, что пересечение разрешимого и перечислимого множеств является перечислимым.

(в) Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо, а $B \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что $A \setminus B$ перечислимо.

(г) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо. Докажите, что множество всех простых элементов множества A также перечислимо.

(д) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что множество всех кратных всех элементов множества A разрешимо.

(е) Известно, что множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо. Докажите, что множество всех делителей всех элементов множества A перечислимо.

(ж) Диофантовым уравнением называется уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любого диофантового уравнения множество всех (целочисленных) решений является перечислимым.

3. Пусть $U(n, x)$ главная универсальная вычислимая функция. Обозначим $\mathcal{C}$ множество всех таких n, что

(а) область определения функции $\varphi(x) = U(n, x)$ содержит бесконечно много простых чисел;

(б) множество значений функции $\varphi(x) = U(n, x)$ конечно;

(в) множество значений функции $\varphi(x) = U(n, x)$ бесконечно;

(г) область определения функции $\varphi(x) = U(n, x)$ содержит только чётные числа;

(д) область определения функции $\varphi(x) = U(n, x)$ содержит все чётные числа (и, быть может, некоторые нечётные);

(е) функция $\varphi(x) = U(n, x)$ является сюръекцией;

(ж) функция $\varphi(x) = U(n, x)$ не является всюду определённой.

Является ли множество $\mathcal{C}$ разрешимым? Перечислимым?

4. Пусть $U(n, x)$ является главной универсальной вычислимой функции.

(а) Докажите, что найдутся такие числа $n_1 \neq n_1$, что $U(n_1, x) = x + n_2$ и $U(n_2, x) = x + n_1$ для всех чисел $x \in \mathbb{N}$.

(б) Докажите, что найдётся такое число n, что

$$U(n, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ U(n, U(n, x-1)) + 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите $U(n, 10)$ для такого n.

(в) Докажите, что найдётся такое число n, что

$$U(n, x) = \begin{cases} U(n, U(n, x+1)), & \text{если } x \leq 20, \\ x + 2, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите $U(n, 10)$ для такого n.

(г) Докажите, что найдётся такое число n, что

$$U(n, x) = \begin{cases} U(n, U(n, x+2)), & \text{если } x \leq 20, \\ x - 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите $U(n, 10)$ для такого n.

(д) Докажите, что существует набор попарно различных программ π_i, $i = 0, \ldots, 99$ на языке `C` (или на языке `Python`) таких, что каждая программа π_i на входе j печатает текст программы π_k для $k = i + j \bmod 100$.

5. Приведите пример m-полного множества в классе

(а) Σ_2,

(б) Π_2,

(в) Σ_3,

(г) Π_3;

ответ обоснуйте.

6. (а) Обозначим $B(n)$ максимальное число шагов, которое может сделать до остановки машина Поста p_i на входе 0 для $i = 0, \ldots, n$ (мы берём максимум только по тем машинам Поста, которые останавливаются на входе 0). Докажите, что $B(n)$ растёт быстрее любой всюду определённой вычислимой функции, т.е., для любой вычислимой и всюду определённой функции $f(n)$ найдется такое число n_0, что $B(n) > f(n)$ при всех $n \geq n_0$.

(б) Будем называть два множества $A, B \subset \mathbb{N}$ вычислимо неотделимыми, если не существует вычислимого множества C такого, что $A \subset C$ и $B \subset \mathbb{N} \setminus C$. Существует ли счётное семейство попарно вычислимо неотделимых множеств? Существует ли семейство мощности континуум, состоящее из попарно вычислимо неотделимых множеств?

(в) Теорема Клини гарантирует, что для каждого вычислимого всюду определённого отображения $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ найдётся «неподвижная точка», т.е., такое число n, что машины

Поста с номерами n и $f(n)$ (из стандартного перечисления машин Поста) вычисляют одну и ту же функцию. Приведите пример такого отображения f_1, для которого все неподвижные точки соответствуют машинам, вычисляющим одну и ту же функцию. Приведите пример такого отображения f_2, у которого есть хотя бы две неэквивалентные неподвижные точки.