Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Математическая индукция

Принцип математической индукции – это способ рассуждения, позволяющий доказать некоторое свойство для *всех* натуральных чисел. Доказательство по индукции состоит в том, что сначала мы проверяем интересующее нас свойство для числа 0 (*база индукции*), а затем показываем, что, если данное свойство выполнено для числа n, то оно верно и для числа $n+1$ (*шаг индукции/индуктивный переход*).

Таким образом, база индукции гарантирует истинность интересующего нас свойства для 0. Далее, индуктивный переход гарантирует, что из истинности свойства для 0 вытекает истинность и для 1; из истинности свойства для 1 вытекает истинность для 2, и так далее. В результате мы заключаем, что данное свойство выполнено для каждого натурального числа.

Более формально принцип индукции можно сформулировать несколькими эквивалентными способами:

(а) Если для некоторого свойства A выполнено $A(0)$, а также для любого n из $A(n)$ следует $A(n+1)$, то для любого натурального n выполнено $A(n)$.
(б) Если для любого n из $A(0), \ldots, A(n-1)$ следует $A(n)$, то для любого n выполнено $A(n)$.
(в) В любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьшее число.
(г) Не существует бесконечной строго убывающей последовательности натуральных чисел.

Задание: Можете ли вы объясните, в каком смысле формулировки (а)-(г) эквивалентны друг другу? Покажите, как логически вывести эти формулировки одну из другой.

1. Докажите, что при любом n квадрат размера $2^n \times 2^n$ без одной угловой клетки можно разбить на уголки из трёх клеток.

2. (а) На плоскости имеется n прямых в общем положении (никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке). На сколько областей делят плоскость эти прямые? (б) На плоскости имеется n окружностей в общем положении (любые две из них пересекаются в двух разных точках, никакие три не пересекаются в одной точке). На сколько областей делят плоскость эти окружности?

3. Докажите, что сумма кубов всех целый чисел от 1 до n равна квадрату суммы всех целых чисел от 1 до n.

4*. Найдите простую формулу (многочлен от n) для вычисления суммы квадратов всех целых чисел от 1 до n. Аналогичное задание для суммы четвёртых, пятых степеней целых чисел.

5. Докажите, что уравнение $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$ не имеет решений в положительных целых числах.

6. Игра “Ханойские башни” состоит из трёх штырей и n колец разного размера. За ход разрешается перенести кольцо с одного штыря на другой, при этом нельзя класть кольцо большего размера на кольцо меньшего.

a) Докажите, что за некоторое число ходов можно перенести все кольца с одного штыря на другой.
b) Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.
c) Докажите, что меньшего числа ходов не хватит.

7. В некоторой стране каждый город соединён с любым другим дорогой с односторонним движением.

a) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам;
b) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам не более чем с одной пересадкой.

8. На краю пустыни имеется резервуар с неограниченным запасом бензина и неограниченное число канистр. Машина может заправлять бензобак из резервуара, сливать бензин из бензобака в канистру и оставлять эту канистру в любой точке пустыни на хранение или заправлять машину из канистры, оставленной на хранение ранее. Возить канистры с бензином запрещается. На полном бензобаке машина может проехать 50 км. Докажите, что машина сможет проехать сколь угодно далеко.

9. Имеется шеренга из n солдат-новобранцев. По команде старшины: «Нале-ВО!» — каждый солдат поворачивается налево или направо (некоторые путают). После этого каждую секунду солдаты, стоящие лицом друг к другу, разворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.

10. Купец совершил с чёртом сделку: каждый день купец меняет у чёрта денежную купюру на любое число более мелких. Получать деньги из других источников купец не может. Как только купец не сможет выполнить договор, он продаст чёрту душу. Докажите, что рано или поздно так и случится. (Имеется лишь конечное число номиналов купюр. Каждый день купцу нужно что-то тратить на еду. Купец и чёрт бессмертны.)

11. На столе лежат фишки с натуральными числами. Некто каждую минуту либо убирает со стола фишку с нулём, либо заменяет одну из фишек на любое количество фишек с меньшими числами. Докажите, что рано или поздно этот процесс закончится.

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция - М.: МЦНМО, 2007