Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Лямбда-исчисление

1. Приведите к нормальной форме следующие λ-термы: (а) $(\lambda z.z(\lambda xy.x))(\lambda w.wab)$, (б) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$, (в) $((\lambda a.(\lambda b.ba)c)b)((\lambda c.(cb))(\lambda a.a))$.

2. Приведите пример λ-терма, не имеющего нормальной формы.

3. Докажите, что α-конверсия обратима: если из λ-терма A последовательностью α-конверсий можно получить λ-терм B, то верно и обратное, т.е., из B последовательностью α-конверсий можно получить A.

4. (а) Докажите, что всякий λ-терм A либо не равен никакому терму B в нормальной форме, либо все нормальные формы, равные A, получаются друг их друга последовательностью α-конверсий. (б) Докажите, что если λ-терм A равен некоторому λ-терму B в нормальной форме, то A можно редуцировать к B (с применив последовательность α-конверсий, β-редукций и η-редукций).

5. (а) Приведите пример λ-терма I ненулевой длины такого, что для любого терма λ-терм X выполнено равенство $\mathrm{I}\,X = X$. (б) Приведите пример λ-терма D такого, что для любого λ-терма X выполнено равенство $\mathrm{D}\,X = XX$. (в) Приведите пример λ-терма S такого, что для любых λ-терм X, Y выполнено равенство $\mathrm{S}\,X\,Y = Y\,X$.
Нумералами Чёрча для натуральных чисел $0, 1, 2, 3, \ldots$ называются комбинаторы

$$\underline{0} = \lambda fx.x,\ \underline{1} = \lambda fx.fx,\ \underline{2} = \lambda fx.f(fx),\ \underline{3} = \lambda fx.f(f(f(x))), \ldots$$

6. Докажите, что $\underline{1}\ F = F$ для любого комбинатора F.

7. Приведите к нормальной форме λ-термы (а) $\underline{2}\ \underline{3}$ и (б) $\underline{3}\ \underline{2}$.

Говорят, что комбинатор A представляет функцию $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, если для любых чисел $n_1, \ldots, n_k$ комбинатор $(A\underline{n_1}\ \underline{n_2}\ \ldots\ \underline{n_k})$ равен нумералу Чёрча для числа $f(n_1, \ldots, n_k)$, если $f(n_1, \ldots, n_k)$ определено, и не имеет нормальной формы в противном случае.

8. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел :

a) $n \mapsto n + 1$,
b) $(n, m) \mapsto n + m$,
c) $(n, m) \mapsto n \cdot m$,
d) $(n, m) \mapsto n^m$,
e) $n \mapsto (n + 3)^2$,

9. Обозначаем **False** $= \lambda xy.y$ и **True** $= \lambda xy.x$. Постройте комбинатор **IsZero** такой, что

$$\mathbf{IsZero}(\underline{n}) = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n = 0, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

10. Постройте комбинаторы **AND**, **OR** и **NOT**, представляющие конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание соответственно. А именно, для комбинатора **AND** должны выполняться свойства

$$\begin{cases} \mathbf{AND}\,\mathbf{True}\,\mathbf{True} &= \mathbf{True}, \\ \mathbf{AND}\,\mathbf{True}\,\mathbf{False} &= \mathbf{False}, \\ \mathbf{AND}\,\mathbf{False}\,\mathbf{True} &= \mathbf{False}, \\ \mathbf{AND}\,\mathbf{False}\,\mathbf{False} &= \mathbf{False}; \end{cases}$$

для комбинатора **OR** должны выполняться свойства

$$\begin{cases} \mathbf{OR}\,\mathbf{True}\,\mathbf{True} &= \mathbf{True}, \\ \mathbf{OR}\,\mathbf{True}\,\mathbf{False} &= \mathbf{True}, \\ \mathbf{OR}\,\mathbf{False}\,\mathbf{True} &= \mathbf{True}, \\ \mathbf{OR}\,\mathbf{False}\,\mathbf{False} &= \mathbf{False}; \end{cases}$$

наконец, для комбинатора **NOT** должны выполняться свойства

$$\begin{cases} \mathbf{NOT}\,\mathbf{True} &= \mathbf{False}, \\ \mathbf{AND}\,\mathbf{False} &= \mathbf{True}. \end{cases}$$

11. Для пары комбинаторов A, B будем обозначать $\langle A, B\rangle$ («код» данной пары) комбинатор $\lambda f.fAB$. Придумайте такие комбинаторы **Pair**, **Left** и **Right**, что

$$\begin{aligned} \mathbf{Pair}\,A\,B &= \langle A, B\rangle, \\ \mathbf{Left}\,\langle A, B\rangle &= A, \\ \mathbf{Right}\,\langle A, B\rangle &= B \end{aligned}$$

для любых комбинаторов A, B.

12. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел :

a) $n \mapsto \begin{cases} n-1, & \text{если } n \geq 1 \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases}$

b) $(n, m) \mapsto n - m,$

13. Постройте комбинатор, представляющий функции

a) $n \mapsto \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n > 10, \\ \mathbf{False}, & \text{если } n \leq 10. \end{cases}$

b) $(m, n) \mapsto |m - n|.$

c) $(m, n) \mapsto \begin{cases} 2n, & \text{если } m < 10, \\ 3n, & \text{если } m \geq 10. \end{cases}$

d) $n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } n = 10, \\ 0, & \text{если } n \neq 10. \end{cases}$

14. Докажите, что для комбинатора

$$Y = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$$

и любого комбинатора F выполнено равенство $YF = F(YF)$ (т.е., комбинатор (YF) является *неподвижной точкой* для F).

15. (продолжение) Обозначим $Z = \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$. Докажите, что для любого комбинатора F выполнено равенство $ZF = F(ZF)$ (т.е., комбинатор (ZF) является *неподвижной точкой* для F).

16. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел :

a) $n \mapsto n!$ (факториал числа),
b) $n \mapsto \lceil \log n \rceil$,
c) остаток от деления n на m,
d) неполное частное от деления n на m.

17. Прямым вычислением приведите к нормальной форме **Fac** $\underline{2}$ и **Fac** $\underline{3}$, где **Fac** – комбинатор, представляющий функцию $n!$.

18. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел :

a) $(n, m) \mapsto \max\{n, m\}$,
b) $n \mapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$,
c) $n \mapsto \lceil \sqrt{n}\ \rceil$.

19. Найдите какую-нибудь неподвижную точку комбинатора прибавления единицы **Inc**. Есть ли у неё нормальная форма?

20. Постройте комбинаторы, которые по нумералу Чёрча для числа n вычисляют нумерал Чёрча для числа φ_n, где

a) $\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, & \text{если } n > 1, \end{cases}$ (числа Фибоначчи)

b) $\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \bmod 3, & \text{если } n \geq 2, \end{cases}$ (числа Фибоначчи по модулю 3)

c) $\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0, \\ 0 & \text{если } n = 1, \\ 2\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} & \text{если } n > 1, \end{cases}$

d) $\varphi_n = \begin{cases} 2 & \text{если } n = 0, \\ 3 & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} & \text{если } n > 1. \end{cases}$

21. Постройте комбинатор, представляющий в λ-исчислении функцию чётности:

$$\mathbf{Even}(\underline{n}) = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ \mathbf{False}, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

22. Постройте комбинаторы **GT**, **LE**, **EQ** такие, что

a) $\mathbf{GT}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n > m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

b) $\mathbf{LE}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \le m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

c) $\mathbf{EQ}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n = m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

23. Постройте комбинатор **choose**, который представляет функцию двух аргументов C_n^k (число сочетаний из n по k), определённую для $n \ge k$. Не забудьте проверить, что при $n < k$ терм (**choose** $\underline{n}$ $\underline{k}$) не имеет нормальной формы.

24*. Постройте комбинатор **Prime** такой, что

$$\mathbf{Prime}\ \underline{n} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если число } n \text{ простое}, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе} \end{cases}$$

(проверка числа на простоту).

25*. Постройте комбинатор **NthPrime**, который по нумералу Чёрча n находит n-ое простое число. (Для определённости потребуем, чтобы **NthPrime** $\underline{0} = \underline{1}$.)

26*. В *стрелочной нотации Кнута* для положительных целых чисел a, b используются обозначения $a \uparrow b = a^b$ (a в степени b), $a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a) \ldots)}_{b \text{ раз}}$,

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n-1} (\ldots \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n-1} a) \ldots)}_{a \text{ встречается } b \text{ раз}};$$

n-ым числом Аккермана называют $Ack_n = n \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n} n$. Вычислите первые три числа Аккермана. Постройте комбинатор **Ack**, который преобразует нумерал $\underline{n}$ (для $n > 0$) в нумерал, выражающий n-ое число Аккермана.