Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Фундированные и вполне упорядоченные множества

1. Купец совершил с чёртом сделку: каждый день купец меняет у чёрта денежную купюру на любое число более мелких. Получать деньги из других источников купец не может. Как только купец не сможет выполнить договор, он продаст чёрту душу. Докажите, что рано или поздно так и случится. (Имеется лишь конечное число номиналов купюр. Каждый день купцу нужно что-то тратить на еду. Купец и чёрт бессмертны.)

2. На столе лежат фишки с натуральными числами. Некто каждую минуту либо убирает со стола фишку с нулём, либо заменяет одну из фишек на любое количество фишек с меньшими числами. Докажите, что рано или поздно этот процесс закончится.

3. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается найти в имеющейся последовательности группу цифр 01 и заменить её на $100\ldots0$ (нулей можно написать сколько угодно). Покажите, что такие шаги нельзя выполнять сколько угодно много раз.

4. Является ли вполне упорядоченным множество всех конечных последовательностей букв латинского алфавита с лексикографическим порядком?

5. Вспомните определение суммы и произведения вполне упорядоченных множеств. Докажите, что сумма двух вполне упорядоченных множеств и произведение двух вполне упорядоченных множеств также является вполне упорядоченным.

6. Пусть A, B и C являются линейно упорядоченными множествами.

(а) [ассоциативность сложения] Могут ли множества $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$ быть не изоморфными?

(б) [коммутативность сложения] Могут ли множества $A+B$ и $B+A$ быть не изоморфными?

(в) [ассоциативность умножения] Могут ли множества $(A\cdot B)\cdot C$ и $A\cdot(B\cdot C)$ быть не изоморфными?

(г) [коммутативность умножения] Могут ли множества $A\cdot B$ и $B\cdot A$ быть не изоморфными?

(д) [правая дистрибутивность] Могут ли множества $(A+B)\cdot C$ и $(A\cdot C)+(B\cdot C)$ быть не изоморфными?

(е) [левая дистрибутивность] Могут ли множества $C\cdot(A+B)$ и $(C\cdot A)+(C\cdot B)$ быть не изоморфными?

(ж) Ответьте на эти вопросы для вполне упорядоченных множеств A, B и C.

7. Докажите, что любое вполне упорядоченное множество A изоморфно некоторой сумме $B+C$, где B и C вполне упорядоченные множества, причем в B нет максимального элемента, а C конечно.

8. Существуют ли такие непустые вполне упорядоченные множества A и B, для которых (а) $A+B\simeq B$? (б*) $A+B\simeq A$?

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция - М.: МЦНМО, 2007

[2] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999

[3] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995