Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
арифметические операции над ординалами

1. Если множество A бесконечно, то $A \cup \mathbb{N}$ равномощно A.

2. Пусть $[0,1] = A \cup B$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A, B имеет мощность континуум (равномощно $[0,1]$).

3. Элемент вполне упорядоченного множества называется *предельным*, если у него нет непосредственного предшественника (например, минимальный элемент множества является предельным элементом). Опишите все вполне упорядоченные множества, в которых есть ровно один предельный элемент.

Порядковым типом линейно упорядоченного множества $(A, \leq)$ называется класс всех вполне упорядоченных множеств, изоморфных $(A, \leq)$. Порядковый тип вполне упорядоченных множеств называют *ординалами*. Будем обозначать $\mathbf{0}$ порядковый тип пустого множества, $\mathbf{1}$ порядковый тип множества из одного элемента, $\mathbf{k}$ порядковый тип линейного порядка на k-элементном множестве (такие ординалы называются конечными), ω порядковый тип множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ со стандартным порядком.

Говорят, что ординал α не превосходит ординала β, если некоторое вполне упорядоченное множество из класса α изоморфно начальному отрезку некоторого вполне упорядоченного множества из класса β. Сумма (произведение) двух порядковых типов α и β определяется как порядковый тип суммы (соответственно, произведения) некоторого упорядоченного множества из α и некоторого упорядоченного множества из β. Обозначают сумму и произведение порядковых типов $\alpha + \beta$ и $\alpha \cdot \beta$.

4. Проверьте, что определение сравнения, а также определения суммы и произведения порядковых типов корректны (не зависит от выбора представителей классов α и β).

5. Ординал β называется предельным, если его нельзя представить в виде $\beta + \mathbf{1}$.

(а) Приведите примеры предельных ординалов.

(б) Покажите, что любой ординал α можно представить в виде $\beta + \mathbf{k}$ для некоторого предельного β и конечного $\mathbf{k}$.

6. Равны ли $\omega \cdot \mathbf{2}$ и $\mathbf{2} \cdot \omega$?

7. Приведите примеры таких α, β, γ, что $\alpha \neq \beta$, но $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

8. Пусть α и β ординалы. Дадим новое (индуктивное) определение суммы ординалов:

$$\begin{cases} \alpha + \mathbf{0} = \alpha, \\ \alpha + (\beta + \mathbf{1}) = (\alpha + \beta) + \mathbf{1}, \\ \alpha + \beta = \lim\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma), \text{ если ординал } \beta \text{ предельный, но не нулевой.} \end{cases}$$

($\lim\limits_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$ обозначает минимальный ординал, не меньший всех $\alpha + \gamma$. Проверьте, что этот предел существует!)

Докажите, что такое определение суммы эквивалентно данному выше определению сложения ординалов. *Указание: проведите индукцию по β.*

9. Предложите индуктивное определение произведения ординалов и докажите его эквивалентность обычному определению произведения упорядоченных множеств.

10. Пусть α и β ординалы. Определим по индукции возведение ординалов в степень:

$$\alpha^{\mathbf{0}} = \mathbf{1},$$
$$\alpha^{\beta+\mathbf{1}} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha,$$
$$\alpha^{\beta} = \lim_{\gamma<\beta} \alpha^{\gamma}, \text{ если ординал } \beta \text{ предельный, но не нулевой.}$$

(а) Докажите, что данное определение корректно, т.е., для любых α и β существует и единственное значение α^{β}. *Указание: индукция по β.*

(б) Опишите ординал $\omega^{\mathbf{2}}$.

(в) Опишите ординал ω^{ω}.

(г*) Докажите, что $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$.

(д*) Докажите, что $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$

11. (а*) Докажите, что существует такой оринал γ, что $\omega^{\gamma} = \gamma$.

(б*) Докажите, что всякий ординал $\alpha < \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ можно представить в виде

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \mathbf{k}_1 + \ldots + \omega^{\beta_s} \cdot \mathbf{k}_s,$$

где $\alpha > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_s$.

Список литературы

[1] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999

[2] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995