Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2012
Арифметическая иерархия

Множество $A \subset \mathbb{N}$ принадлежит классу Σ_n, если существует разрешимое множество $R \subset \mathbb{N}^{n+1}$, такое что $x \in A$ тогда и только тогда, когда

$$\exists y_1 \forall y_2 \ldots \mathbf{Q} y_n \ (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R,$$

где $\mathbf{Q} = \forall$ при чётном n и $\mathbf{Q} = \exists$ при нечётном n.

Аналогично множество $B \subset \mathbb{N}$ принадлежит классу Π_n, если существует разрешимое множество $R \subset \mathbb{N}^{n+1}$, такое что $x \in B$ тогда и только тогда, когда

$$\forall y_1 \exists y_2 \ldots \mathbf{Q} y_n \ (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R,$$

где $\mathbf{Q} = \exists$ при чётном n и $\mathbf{Q} = \forall$ при нечётном n.

1. Докажите, что $A \in \Sigma_n$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} \in \Pi_n$.

2. Докажите, что $\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1}$, $\Sigma_n \subset \Pi_{n+1}$, $\Pi_n \subset \Sigma_{n+1}$, $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$.

3. Докажите, что классы Σ_n и Π_n не изменятся, если в определении разрешить замену одного квантора на несколько одноимённых ему.

4. Пусть $A \in \Sigma_n$ и $B \in \Sigma_n$. Докажите, что $A \cup B$ и $A \cap B$ лежат в Σ_n.

5. Пусть $A \in \Pi_n$ и $B \in \Pi_n$. Докажите, что $A \cup B$ и $A \cap B$ лежат в Π_n.

6. Пусть $A \in \Sigma_n$ и $B \in \Pi_n$. Докажите, что $A \cup B$ и $A \cap B$ лежат в $\Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.

7. Пусть $A \in \Sigma_n$. Докажите, что $A \times A \in \Sigma_n$ (тут используется вычислимое кодирование пар).

8. Докажите, что следующие множества лежат в арифметической иерархии. Докажите, что ни они сами, ни их дополнения не перечислимы.

a) Множество машин, которые останавливаются на все числах из некоторой арифметической прогрессии.
b) Множество машин, в области определения которых ни одно число не делится на другое.
c) Множество машин, которые на всех достаточно больших n останавливаются не более, чем за n^2 шагов.
d) Множество машин, которые определены и принимают одно и то же значение для всех достаточно больших n.
e) Множество машин, которые вычисляют некоторую биекцию.

9. (Дополнительная.) Для каждого множества из задачи 8 укажите минимальный класс арифметической иерархии (Σ_n или Π_n для некоторого n), в котором лежит это множество.