Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Построение неразрешимых и неперечислимых множеств

Функция $U\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ называется *универсальной вычислимой*, если она вычислима (как функция двух аргементов) и для любой вычислимой функции $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся такое число $n$, что при всех $x$ выполнено $U(n,x)=\varphi(x)$ (обе части равенства определены для одних и тех же $x$ и на всех $x$ из области определения принимают равные значения). Машина Поста $\mathcal{U}$ от двух аргументов называется универсальной, если для каждой пары наутральных числе $(n,x)$, получив на вход двоичную запись номера программы $p_n$ ($n$-ой программы в стандартной нумерации машин Поста) и двоичную запись числа $x$, она возвращает результат работы машины $p_n$ на входе $x$ (если программа $p_n$ не останавливается на входе $x$, то машина $\mathcal{U}$ на входе $(n,x)$ тоже не останавливается). Формально, $\mathcal{U}(n,x)=p_n(x)$ (обе части равенства одновременно неопределены или одновременно определены и принимают одно и то же значение).

**1.** Постройте такой многочлен двух переменных $p(x,y)$, что отображение $p:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ является биекцией (значение $p(n,m)$ удобно использовать в качестве “кода” пары $\langle n,m\rangle$).

**2.** Докажите, что существует такая вычислимая инъекция $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$, что для любых $n,m\in\mathbb{N}$
$$|f(n,m)|\leq 1{,}01\cdot(|x|+|y|)+O(1),$$
где $|x|$ обозначает длину двоичной записи числа $x$. (Функция $f$ является “экономным” кодом пары $\langle n,m\rangle$).

**3.** Докажите, что универсальная машина Поста вычисляет универсальную вычислимую функцию.

**4.** При любом фиксированном $n$ функция $V(n,x)$ вычислима как функция от $x$. Верно ли, что $V$ вычислима как функция двух аргументов?

**5.** Докажите, что не существует универсальной тотально вычислимой функции, т.е. всюду определённой функции $U\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такой, что для любой всюду определённой вычислимой функции $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся такое $n$, что при всех $x$ выполнено $U(n,x)=f(x)$.

**6.** Докажите, что существует универсальное перечислимое множество, т.е. такое перечислимое множество $W\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, что среди множеств $W\cap(\{i\}\times\mathbb{N})$ встречаются все перечислимые подмножества $\mathbb{N}$.

**7.** Существует ли универсальное разрешимое множество, т.е. такое разрешимое множество $S\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, что среди множеств $S\cap(\{i\}\times\mathbb{N})$ встречаются все разрешимые подмножества $\mathbb{N}$?

**8.** Докажите, что существует вычислимая функция, совпадающая с любой другой хотя бы на одном аргументе (в частности, обе могут быть не определены). (Указание: это $U(n,n)$).

Функция $f$ продолжает функцию $g$, если $f(n) = g(n)$ при всех $n$, на которых $g$ определена.

**9.** Докажите, что существует вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продожения. (Указание: можно взять $U(n,n)+1$ или $U(n,n)$).

**10.** Докажите, что область определения любой вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения, является перечислимым, но не разрешимым множеством.

**11.** Докажите, что $\{n \mid U(n,n)$ определено$\}$ является перечислимым, но не разрешимым множеством.

**12.** Докажите, что существует вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения и принимающая только значения 0 и 1.

**13.** Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $A$ и $B$, для которых не существует разрешимого $R$, такого что $A \subset R$ и $B \cap R = \varnothing$. (Такие множества называются неотделимыми).

**14.** Докажите, что существует счётное число попарно непересекающихся попарно неотделимых множеств.

**15.** Докажите, что $\{(n,x) \mid U(n,x)$ определено$\}$ является перечислимым, но не разрешимым множеством.

**16.** Докажите, что $\{n \mid U(n,0)$ определено$\}$ является перечислимым, но не разрешимым множеством.

**17.** Докажите, что при некоторых $n$ множество $\{x \mid U(n,x)$ определено$\}$ является перечислимым, но не разрешимым.

**18.** Докажите, что множество $\{n \mid U(n,x)$ определено при всех $x\}$ не является ни перечислимым, ни коперечислимым.

**19.** Докажите, что множество $\{n \mid U(n,0)$ определено, а $U(n,1)$ не определено$\}$ не является ни перечислимым, ни коперечислимым.