

Московский физико-технический институт  
Факультет инноваций и высоких технологий  
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013  
Свойства  $m$ -сводимости

Будем говорить, что множество  $A \subset \mathbb{N}$   $m$ -сводится к множеству  $B \subset \mathbb{N}$  (обозначение:  $A \leq_m B$ ), если существует такая вычислимая всюду определенная функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Пусть  $\mathcal{C}$  — некоторый класс подмножеств  $\mathbb{N}$ . Говорят, что  $A$  является  $m$ -полным в  $\mathcal{C}$ , если  $A \in \mathcal{C}$  и для любого  $B \in \mathcal{C}$  выполнено  $B \leq_m A$ .

1. Докажите, что любое множество  $A$   $m$ -сводится к самому себе.
2. Докажите, что если  $A \leq_m B$  и  $B \leq_m C$ , то  $A \leq_m C$ .
3. Докажите, что если  $A \leq_m B$ , то  $(\mathbb{N} \setminus A) \leq_m (\mathbb{N} \setminus B)$ .
4. Докажите, что всякое разрешимое множество  $A$  сводится к любому множеству  $B \subset \mathbb{N}$  кроме (быть может)  $\mathbb{N}$  и пустого множества.
5. Докажите, что если  $A \leq_m B$  и  $B$  разрешимо, то  $A$  тоже разрешимо.
6. Докажите, что если  $A \leq_m B$  и  $B$  перечислимо, то и  $A$  перечислимо.
7. Приведите пример множества  $A$ , которое не сводится к своему дополнению.
8. Обозначим

$$S = \{ \langle n, m \rangle \mid \text{машина Поста } p_n \text{ останавливается на входе } m \}$$

( $\langle n, m \rangle$  обозначает код пары натуральных чисел  $n, m$  при некотором вычислимом кодировании). Докажите, что  $S$  является  $m$ -полным множеством в классе всех перечислимых множеств.

9. Обозначим

$$K = \{ n \mid \text{машина Поста } p_n \text{ останавливается на входе } n \}.$$

Докажите, что  $K$  также является  $m$ -полным множеством в классе всех перечислимых множеств.

10. Рассмотрим следующие множества номеров машин Поста:

- a) номера машин, которые останавливаются на собственном номере;
  - b) номера машин, которые останавливаются на любом входе;
  - c) номера машин, которые не останавливаются ни на одном входе;
  - d) номера машин, которые останавливаются на бесконечном множестве входов;
  - e) номера машин, которые останавливаются на всех числах из некоторой арифметической прогрессии;
  - f) номера машин, которые вычисляют некоторую биекцию  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .
- (a) Какие из множеств (a)–(f) перечислимы?
  - (б) Какие из этих множеств коперечислимы (являются дополнением перечислимого)?
  - (в) Для каждой пары множеств (a)–(f) установите, какое из множеств  $m$ -сводится к другому.