Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Фундированные и вполне упорядоченные множества

1. В кучке лежат n палочек. Два игрока по очереди берут из неё палочки. За один ход разрешается взять одну, две или три палочки. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. (Другими словами, выигрывает тот, кто забирает последнюю палочку). При каких n первый игрок имеет выигрышную стартегию?

2. Будем называть множество действительных чисел *стандартным*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям: (1) множество содержит числа 0 и 1, и (2) если множество содержит какие-то числа x и y, то оно содержит также и число $(x+y)/2$. Докажите, что минимальное стандартное множество не содержит число $1/3$.

3. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается найти в имеющейся последовательности группу цифр 01 и заменить её на $100\ldots0$ (нулей можно написать сколько угодно). Покажите, что такие шаги нельзя выполнять сколько угодно много раз.

4. Является ли вполне упорядоченным множество всех конечных последовательностей букв латинского алфавита с лексикографическим порядком?

5. Вспомните определение суммы и произведения вполне упорядоченных множеств. Докажите, что сумма двух вполне упорядоченных множеств и произведение двух вполне упорядоченных множеств также является вполне упорядоченным.

6. Пусть A, B и C являются линейно упорядоченными множествами.

(а) [ассоциативность сложения] Могут ли множества $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$ быть не изоморфными?

(б) [коммутативность сложения] Могут ли множества $A+B$ и $B+A$ быть не изоморфными?

(в) [ассоциативность умножения] Могут ли множества $(A\cdot B)\cdot C$ и $A\cdot(B\cdot C)$ быть не изоморфными?

(г) [коммутативность умножения] Могут ли множества $A+B$ и $B+A$ быть не изоморфными?

(д) [правая дистрибутивность] Могут ли множества $(A+B)\cdot C$ и $(A\cdot C)+(B\cdot C)$ быть не изоморфными?

(е) [левая дистрибутивность] Могут ли множества $C\cdot(A+B)$ и $(C\cdot A)+(C\cdot B)$ быть не изоморфными?

(ж) Ответьте на эти вопросы для вполне упорядоченных множеств A, B и C.

7. Докажите, что любое вполне упорядоченное множество A изоморфно некоторой сумме $B+C$, где B и C вполне упорядоченные множества, причем в B нет максимального элемента, а C конечно.

8. Существуют ли такие непустые вполне упорядоченные множества A и B, для которых (а) $A+B\simeq B$? (б*) $A+B\simeq A$?

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция - М.: МЦНМО, 2007

[2] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999

[3] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995