Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий.
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013.
Лямбда-исчисление: приведение термов к нормальной форме.

Определение. В чистом λ-исчислении *термы* определяется следующим образом:

a) все переменные суть термы,
b) если A и B суть термы, то (AB) есть терм,
c) если A является термом и x переменная, то $(\lambda x.A)$ есть терм.

Соглашение о скобках: внешняя пара скобок терма обычно опускается; кроме того, вместо $(\ldots(X_1X_2)X_3)\ldots X_n)$ пишут $X_1X_2\ldots X_n$ (скобки по умолчанию группируются влево); вместо $\lambda.(AB)$ пишут $\lambda.AB$ (квантор λ имеет меньший приоритет, чем аппликация); наконец, вместо

$$(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\ldots\lambda x_n.A)\ldots))$$

пишут $\lambda x_1x_2\ldots x_n.A$

Область действия квантора λ и понятия свободной и связанной переменной определяется обычным образом. Замкнутый λ-терм (терм без свободных вхождений переменных) называется *комбинатором.*

Определение. *α-конверсией* $A \longrightarrow B$ называется преобразование термов следующего вида:

a) $\lambda x.A \longrightarrow \lambda y.A[y/x]$ (все свободные вождения переменной x в A заменяются на y; при этом переменная y не должна входить в исходный терм A);
b) если $A \longrightarrow B$ есть α-конверсия, то $(AC) \longrightarrow (BC)$ и $(CA) \longrightarrow (CB)$ суть α-конверсии;
c) если $A \longrightarrow B$ есть α-конверсия, то $\lambda x.A \longrightarrow \lambda x.B$ тоже α-конверсия.

Определение. *β-редукцией* $A \to B$ называется преобразование термов следующего вида:

a) $(\lambda x.A)B \longrightarrow A[B/x]$ (все свободные вождения переменной x в A заменяются на терм B (при этом предполагается, что при подстановке в A свободные переменные терма B не попадают в область действия кванторов по одноименным переменным);
b) если $A \longrightarrow B$ есть β-редукция, то $(AC) \longrightarrow (BC)$ и $(CA) \longrightarrow (CB)$ суть β-редукции;
c) если $A \longrightarrow B$ есть β-редукция, то $\lambda x.A \longrightarrow \lambda x.B$ тоже β-редукция.

Определение. λ-термы A и B называются *равными*, если существует цепочка λ-термов

$$A \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_n \longrightarrow B,$$

где каждый следующий терм получается из предыдущего либо с помощью α-конверсии, либо с помощью β-редукции, либо с помощью преобразования, обратного к β-редукции. (Кроме того, каждый терм считается равным самому себе.)

Определение. Говорят, что λ-терм A имеет *нормальную форму*, если к нему нельзя применить β-редукцию (даже предварительно применив несколько раз α-конверсию).

Теорема (Чёрча–Россера). Если λ-термы A и B равны, то существует такой λ-терм C, что A и B можно преобразовать в C цепочкой α-конверсий и β-редукций (не используя преобразования, обратные к β-редукции).

1. Приведите к нормальной форме λ-терм $((\lambda a.(\lambda b.ba)c)b)((\lambda c.(cb))(\lambda a.a))$

2. Приведите к нормальной форме термы:

a) $(\lambda xy.x(xxy))((\lambda xy.x(xxy))(\lambda xy.x(xy)))$,
b) $(\lambda xy.x(xy))((\lambda xy.x(xxxy))(\lambda xy.x(xy)))$,
c) $(\lambda xy.x(xy))(\lambda xy.x(xxxy))(\lambda xy.x(xy))$.

3. Приведите пример замкнутого λ-терма (комбинатора), не равного никакому терму в нормальной форме.

4. Пусть термы A и B равны и оба являются нормальным формами. Докажите, что один можно преобразовать в другой с помощью одних лишь α-конверсий. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Чёрча–Россера.

Нумералами Чёрча для натуральных чисел $0, 1, 2, 3, \ldots$ называются комбинаторы

$$\underline{0} = \lambda fx.x,\ \underline{1} = \lambda fx.fx,\ \underline{2} = \lambda fx.f(fx),\ \underline{3} = \lambda fx.f(f(f(x))), \ldots$$

5. (а) Приведите к нормальной форме λ-терм $(\underline{10}\ x)$. (б) Приведите к нормальной форме комбинаторы $(\underline{2}\ \underline{3})$ и $(\underline{3}\ \underline{2})$.

6. Постройте комбинатор, реализующий тождественную функцию $\mathbf{id} : n \mapsto n$.

Говорят, что комбинатор A представляет функцию $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, если для любых чисел $n_1, \ldots, n_k$ комбинатор $(A\underline{n_1}\ \underline{n_2}\ \ldots\ \underline{n_k})$ равен нумералу Чёрча для числа $f(n_1, \ldots, n_k)$, если $f(n_1, \ldots, n_k)$ определено, и не имеет нормальной формы в противном случае.

Теорема. Любая вычислимая функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ представима в лямбда-исчислении.

7. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел:

a) $n \mapsto n + 1$,
b) $(n, m) \mapsto n + m$,
c) $(n, m) \mapsto n \cdot m$,
d) $(n, m) \mapsto n^m$,
e) $n \mapsto (n + 3)^2$,
f) $n \mapsto (n + 2)^3$.

8. Обозначаем **False** $= \lambda xy.y$ и **True** $= \lambda xy.x$.

(а) Постройте комбинатор **NOT**, представляющий конъюнкция в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \mathbf{NOT\ True} &= \mathbf{False}, \\ \mathbf{NOT\ False} &= \mathbf{True}. \end{aligned}$$

(b) Постройте комбинатор **AND**, представляющий конъюнкция в следующем смысле:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{AND\ True\ True} & = & \mathbf{True}, \\ \mathbf{AND\ True\ False} & = & \mathbf{False}, \\ \mathbf{AND\ False\ True} & = & \mathbf{False}, \\ \mathbf{AND\ False\ False} & = & \mathbf{False}. \end{array}$$

(c) Постройте комбинатор **OR**, аналогичным образом представляющий дизъюнкцию.

9. Постройте комбинатор **IsZero** такой, что

$$\mathbf{IsZero}(\underline{n}) = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n = 0, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

10. Будем называть *кодом пары* комбинаторов A и B комбинатор $\lambda f.fAB$

(a) Постройте такой комбинатор **Pair**, что для любых комбинаторов A и B

$$\mathbf{Pair}\ A\ B = \lambda f.fAB$$

(b) Постройте комбианторы **Left** и **Right** со следующим свойством. Если комбинатор P есть код пары комбинаторов A и B, то **Left** $P = A$ и **Right** $P = B$.

11*. Постройте комбинатор, который представляет функцию вычитания единицы:

$$n \mapsto \begin{cases} n-1, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases}$$

12. Постройте комбинатор, который представляют функцию вычитания натуральных чисел: $(n, m) \mapsto \max\{n - m, 0\}$.