Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий.
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013.
Лямбда-исчисление: комбинаторы неподвидной точки и рекурсивное программирование.

Теорема (о неподвижной точке в λ-исчислении).

(а) Для любого λ-терма F существует такой λ-терм X, что $FX = X$. Такой терм X называется *неподвижной точкой* F.

(б) Более того, существует такой комбинатор $\mathbf{Y}$, что для любого λ-терма F терм $(\mathbf{Y}F)$ является неподвижной точкой F, т.е., $F(\mathbf{Y}F) = \mathbf{Y}F$. (Такой комбинатор $\mathbf{Y}$ называют *комбинатором неподвидной точки*.)

В следующих трёх задачах приводятся три варианта доказательства теоремы о неподвижной точке.

1. Докажите, что комбинатор $\mathbf{Y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ (комбинатор Хаскелла Карри) является комбинатором неподвижной точки.

2. Обозначим $\Theta = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$ (комбинатор Алана Тьюринга). Докажите, что для любого комбинатора F выполнено равенство $\Theta F = F(\Theta F)$, т.е., комбинатор (ΘF) является неподвижной точкой для F.

3. Обозначим через L комбинатор

$$\lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$$

(комбинатор Яна Клопа). Докажите, что комбинатор

$$LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

(произведение 26 копий L) является комбинатором неподвижной точки. *Указание:* обратите внимание на переменную r.

В следующих задачах теорема о неподвижной точке используется для «рекурсивного программирования» в λ-исчислении.

4. Постройте комбинатор **Fac**, которые представляют функцию факториал натурального числа $n \mapsto n!$ (факториал числа).

5. Прямым вычислением приведите к нормальной форме **Fac** $\underline{2}$ и **Fac** $\underline{3}$, где **Fac** – комбинатор, представляющий функцию факториал.

6. Постройте комбинатор, которые по нумералу Чёрча для числа n вычисляют нумерал Чёрча для n-ого число Фибоначчи числа φ_n,

$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

7. Найдите такой комбинатор F, который является неподвижной точкой каждого нумерала $\underline{n}$, т.е.,

$$\underline{n}F = F$$

для всех натуральных n.

8. Постройте λ-терм F, для которого выполнено равенство

$$F = xF$$

(где x — переменная). Приводится ли данный терм F к нормальной форме?

9. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел :

a) $n \mapsto \lceil \log_2 n \rceil$,
b) остаток от деления n на m,
c) неполное частное от деления n на m.

10. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел:

a) $(n, m) \mapsto \max\{n, m\}$,
b) $n \mapsto \lfloor \sqrt{n} \rfloor$,
c) $n \mapsto \lceil \sqrt{n}\ \rceil$.

11. Постройте комбинаторы, которые по нумералу Чёрча для числа n вычисляют нумерал Чёрча для числа φ_n, где

a) $\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \bmod 3, & \text{если } n \geq 2, \end{cases}$

b) $\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0, \\ 0 & \text{если } n = 1, \\ 2\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} & \text{если } n > 1, \end{cases}$

c) $\varphi_n = \begin{cases} 2 & \text{если } n = 0, \\ 3 & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} & \text{если } n > 1. \end{cases}$

12. Постройте комбинатор, представляющий в λ-исчислении функцию чётности:

$$\mathbf{Even}(\underline{n}) = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ \mathbf{False}, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

13. Постройте комбинаторы **GT**, **LE**, **EQ** такие, что

a) $\mathbf{GT}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n > m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

b) $\mathbf{LE}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \leq m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

c) $\mathbf{EQ}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n = m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

14. Постройте комбинатор **choose**, который представляет функцию двух аргументов C_n^k (число сочетаний из n по k), определённую для $n \geq k$. Не забудьте проверить, что при $n < k$ терм (**choose** $\underline{n}$ $\underline{k}$) не имеет нормальной формы.