Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Вполне упорядоченные множества и мощности множеств

1. Пусть $(A, \leq)$ является вполне упорядоченным множеством, и $f : A \to A$ строго монотонная функция (если $x < y$, то $f(x) < f(y)$). Докажите, что $f(x) \geq x$ для всех $x \in A$. Проведите доказательство тремя способами (используя три варианта определения фундированного множества).

2. Пусть $(A, \leq)$ является вполне упорядоченным множеством. Докажите, что для всякого элемента $a \in A$ найдется такой предельный элемент $b \in A$, что $b \leq a$, и между a и b лежит лишь конечное число элементов. (Если элемент a является предельным, то b совпадает с a.)

3. Подмножество частично упорядоченного множества называется *цепью*, если любые два элемента этого подмножества сравнимы между собой. Докажите, что частично упорядоченное множество является фундированным, если и только если каждая его цепь является вполне упорядоченным множеством.

4. Будем называть линейно упорядоченное множество $(M, \leq)$ *правильным*, если: (1) оно содержит наименьший элемент, и (2) всякая неубывающая последовательность элементов этого множества имеет точную верхнюю грань. (a) Существует ли вполне упорядоченное, но не правильное множество? (b) Существует ли правильное, но не вполне упорядоченное множество?

5. Элемент a волне упорядоченного множества называется предельным, если у него нет непосредственного предшественника. (a) Опишите все вполне упорядоченные множества, в которых есть ровно один предельный элемент. (b) Опишите все вполне упорядоченные множества, в которых есть ровно два предельных элемента.

6. Опишите все линейно упорядоченные множества такие, что между любыми двумя элементами $a \leq b$ найдется лишь конечное число таких c, что $a \leq c \leq b$.

7. Приведите пример фундированного множества, равномощного $\mathbb{R}$.

8. Если множество A бесконечно, то $A \cup \mathbb{N}$ равномощно A.

9. (a) Равномощно ли множество всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множеству $\mathbb{R}$? (b) Равномощно ли множество всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множеству $\mathbb{R}$? (c) Равномощно ли множество всех монотонных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множеству $\mathbb{R}$?

10. Если $[0, 1] = A \cup B$, то хотя бы одно из множеств A, B равномощно $[0, 1]$.

11. Если $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то хотя бы одно из множеств A_i равномощно $[0, 1]$.

Список литературы

[1] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999

[2] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995