Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Операции сложения и умножения на вполне упорядоченных множествах.

1. Докажите, что существует не более одного изоморфизма между двумя вполне упорядоченными множествами.

2. Докажите, что бесконечное вполне упорядоченное множество изоморфно натуральному ряду (с обычным порядком на нём), если и только если все начальные отрезки этого множества конечны. Верно ли аналогичное утверждение для произвольного линейно упорядоченного (не обязательно вполне упорядоченного) множества?

3. Вспомните определение суммы и произведения вполне упорядоченных множеств. Докажите, что сумма двух вполне упорядоченных множеств и произведение двух вполне упорядоченных множеств также является вполне упорядоченным.

4. Докажите, что любое вполне упорядоченное множество изоморфно сумме $A + B$ некоторых вполне упорядоченных множеств A и B, причем A не имеет максимального элемента, а B конечно или пусто.

5. Пусть A, B и C являются линейно упорядоченными множествами.

(а) [ассоциативность сложения] Могут ли множества $(A+B)+C$ и $A+(B+C)$ быть не изоморфными?

(б) [коммутативность сложения] Могут ли множества $A + B$ и $B + A$ быть не изоморфными?

(в) [ассоциативность умножения] Могут ли множества $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ быть не изоморфными?

(г) [коммутативность умножения] Могут ли множества $A + B$ и $B + A$ быть не изоморфными?

(д) [правая дистрибутивность] Могут ли множества $(A + B) \cdot C$ и $(A \cdot C) + (B \cdot C)$ быть не изоморфными?

(е) [левая дистрибутивность] Могут ли множества $C \cdot (A+B)$ и $(C \cdot A)+(C \cdot B)$ быть не изоморфными?

(ж) Ответьте на эти вопросы для вполне упорядоченных множеств A, B и C.

6. Существуют ли такие непустые вполне упорядоченные множества A и B, для которых (а) $A + B \simeq B$? (б*) $A + B \simeq A$?

7*. Докажите, что любое вполне упорядоченное бесконечное множество равномощно своему декартову квадрату. *Указание:* Рассмотрите вполне упорядоченные множества $(A, \leq)$, не имеющие максимального элемента, и постройте изоморфизм между A и его квадратом с помощью трансфинитной рекурсии.

(*Замечание:* Используя теорему Цермело, можно доказать, что любое бесконечное множество равномощно своему квадрату.)

8*. Используя теорему Цермело, докажите, что на плоскости существует множество точек, которое пересекается с каждой прямой по двум точкам.

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция - М.: МЦНМО, 2007

[2] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999

[3] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995