Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Ординалы

Множество A называется *транзитивным*, если из $B \in A$ и $C \in B$ следует, что $C \in A$. Множество A называется *ординалом*, если выполняются два условия:

(1) A тразитивно,

(2) всякий элемент A транзитивен.

1. Привести примеры: а) нетранзитивного множества; б) транзитивного множества из 3 элементов; в)транзитивного множества с нетранзитивным элементом.

2. Докажите, что объединение любого множества ординалов есть ординал.

3. Для всякого множества A будем обозначать $S(A) = A \cup \{A\}$. Докажите, что если α ординал, то $S(\alpha)$ тоже ординал.

4. Обозначим $\mathbf{0} = \emptyset$, $\mathbf{1} = S(\mathbf{0})$, $\mathbf{2} = S(\mathbf{1})$, $\mathbf{3} = S(\mathbf{2})$, и т.д. Сколько элементов содержится в ординале $S(\mathbf{n})$? Опишите это множество.

5. Пусть множество α является ординалом. Докажите, что

(а) всякий элемент α есть ординал;

(б) α с отношением « $x \in y$ или $x = y$» является частично упорядоченным множеством;

(в) α с отношением «$x \in y$ или $x = y$» является фундированным множеством;

(г) для любых элементов x, y ординала α имеет место ровно одна из трёх возможностей: $x \in y$, $y \in x$, или $x = y$ (таким образом, элементы ординала с отношением принадлежности образуют вполне упорядоченное множество).

6. Пусть α и β ординалы. Докажите, что имеет место одна из трёх возможностей: $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$, или $\alpha = \beta$.

7. Докажите, что любой начальный отрезок ординала сам изоморфен некоторому ординалу.

8*. Докажите, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому ординалу.

9. Ординал α называется предельным, если его нельзя представить в виде $S(\beta)$. Приведите примеры предельных и непредельных ординалов.

10. Докажите, что для всякого предельного ординала α

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta.$$

11. Пусть α и β ординалы. Дадим индуктивное определение суммы ординалов:

$$\begin{cases} \alpha + \mathbf{0} = \alpha, \\ \alpha + (\beta + \mathbf{1}) = (\alpha + \beta) + \mathbf{1}, \\ \alpha + \beta = \lim\limits_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma), \text{ если ординал } \beta \text{ предельный, но не нулевой.} \end{cases}$$

($\lim\limits_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma)$ обозначает минимальный ординал, не меньший всех $\alpha+\gamma$. Проверьте, что этот предел всегда существует.)

Докажите, что определенная таким образом сумма ординалов α и β изоморфна (как вполне упорядоченное множество) обычной сумме вполне упорядоченных множеств α и β. *Указание: проведите индукцию по* β.

12. Покажите, что любой ординал α можно представить в виде $\beta+\mathbf{k}$ для некоторого предельного β и конечного $\mathbf{k}$.

13. Равны ли $\omega\cdot\mathbf{2}$ и $\mathbf{2}\cdot\omega$?

14. Приведите примеры таких α,β,γ, что $\alpha\neq\beta$, но $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

15. Предложите индуктивное определение *произведения* ординалов и докажите его эквивалентность обычному определению произведения упорядоченных множеств.

16. Пусть α и β ординалы. Определим по индукции возведение ординалов в степень:

$$\begin{aligned}&\alpha^{\mathbf{0}}=\mathbf{1},\\&\alpha^{\beta+\mathbf{1}}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha,\\&\alpha^{\beta}=\lim_{\gamma<\beta}\alpha^{\gamma},\ \text{если ординал } \beta \text{ предельный, но не нулевой.}\end{aligned}$$

(а) Докажите, что данное определение корректно, т.е., для любых α и β существует и единственное значение α^{β}. *Указание: индукция по* β.

(б) Опишите ординал $\omega^{\mathbf{2}}$.

(в) Опишите ординал ω^{ω}.

(г*) Докажите, что $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$.

(д*) Докажите, что $\alpha^{\beta\cdot\gamma}=(\alpha^{\beta})^{\gamma}$

17*. (а) Докажите, что существует такой оринал γ, что $\omega^{\gamma}=\gamma$.

(б) Докажите, что существует минимальный ординал ε_0, больший всех ординалов вида $\alpha<\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}$.

(в) Докажите, что всякий ординал $\alpha<\varepsilon_0$ можно представить в виде

$$\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot\mathbf{k}_1+\ldots+\omega^{\beta_s}\cdot\mathbf{k}_s,$$

где $\alpha>\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_s$.

Список литературы

[1] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999

[2] Йех Т. теория множеств и метод форсинга. Мир, 1973.

[3] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995