Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Применение трансфинитной индукции

Теорема Цермело. Каждое множестве A можно вполне упорядочить, т.е., ввести на нём такой линейный порядок $\leq$, чтобы $(A, \leq)$ оказалось вполне упорядоченным множеством.

1. Докажите, что любые два множества можно сравнить по мощности: для любых A, B выполнено $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$.

2. (а) Докажите, что существует минимальный ординал, равномощный $\mathbb{R}$. (б) Докажите, что для любого множества A найдется минимальный ординал α, равномощный A.

3. Докажите, что для всякого бесконечного A выполнено $|A| = |A \times \mathbb{N}|$.

4*. *Лемма Цорна.* Пусть в частично упорядоченном множестве $(A, \leq)$ для любой цепи (линейно упорядоченного подмножества) найдётся верхняя грань. Тогда в множестве A есть (хотя бы один максимальный элемент). Более того, для любого $a \in A$ найдётся максимальный элемент a' такой, что $a' \geq a$.

5. Докажите, что каждое бесконечное множество A равномощно своему декартову квадрату $A \times A$.

6. Если множество A бесконечно, то 2^A равномощно A^A.

7. (а) Если $\mathbb{R} = A \cup B$, то хотя бы одно из множеств A, B равномощно $\mathbb{R}$. (б) Докажите, что для любых бесконечных множеств A и B

$$|A \cup B| = |A| \text{ или } |A \cup B| = |B|.$$

8*. Докажите, что существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой выполнено свойство

$$\forall x \; \forall y \; f(x + y) = f(x) + f(y),$$

но которую нельзя представить в виде $f(x) = \lambda x$ (для действительного λ).

9*. Докажите, что на плоскости найдётся такое множество точек, которое пересекается с каждой прямой плоскости ровно в двух точках.

10*. Докажите, что для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ его последовательность Гудстейна конечна.

Список литературы

[1] Верещагин Н., Шень А. Начала теории множеств - М.: МЦНМО, 1999.

[2] Йех Т. теория множеств и метод форсинга. Мир, 1973.

[3] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов - М.: Физико-математическая литература, 1995.