Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Вычислимые функции; разрешимые и перечислимые множества

Частично определённая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *вычислимой*, если найдётся алгоритм, который преобразует x в $f(x)$, если $f(x)$ определено, и не останавливается на входе x в противном случае. Вычислимая функция нескольких аргументов определяется аналогично.

1. Докажите, что не все функции вычислимы.

2. Докажите, что композиция вычислимых функций вычислима.

3. Докажите, что любая функция с конечной областью определения вычислима.

4. Докажите, что существует биективное вычислимое кодирование пар, т.е. такая вычислимая инъекция $E\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что вычислимы функции $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых выполнено $l(E(x, y)) = x$ и $r(E(x, y)) = y$.

Множество $A \subset \mathbb{N}$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, распознающий по произвольному натуральному n, верно ли, что $n \in A$.

5. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда вычислима его характеристическая функция

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A; \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

6. Докажите, что не все множества разрешимы. Может ли подмножество разрешимого множества быть неразрешимым?

7. Докажите, что следующие два определения эквивалентны:

a) Множество $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ разрешимо, если существует алгоритм с двумя входами, распознающий по произвольной паре натуральных n и m, верно ли, что $(n, m) \in B$.

b) Множество $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ разрешимо, если разрешимо множество $\{E(n, m) \mid (n, m) \in B\}$, где E — биективное вычислимое кодирование пар.

8. Докажите, что объединение, пересечение, разность и прямое произведение разрешимых множеств разрешимы.

9. Докажите, что любое конечное множество разрешимо.

10. Докажите, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно либо пусто, либо является множеством значений некоторой всюду определённой неубывающей вычислимой функции.

11. Докажите, что сумма разрешимых множеств разрешима. (Сумма множеств A и B определяется как множество $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$).

Множество $A \subset \mathbb{N}$ называется *перечислимым*, если существует алгоритм, перечисляющий все его элементы в каком-то порядке.

12. Формализуйте это определение в терминах машин Поста или машин Тьюринга.

13. Докажите, что множество A перечислимо тогда и только тогда, когда выполнено одно из свойств:

a) Вычислима полухарактеристическая функция множества A:

$$\bar{\chi}_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A; \\ \text{не определена}, & n \notin A; \end{cases}$$

b) A является областью определения вычислимой функции;
c) A является областью значений вычислимой функции;
d) A пусто или является областью значений всюду определённой вычислимой функции;
e) A перечисляется алгоритмом, печатающим каждое число по одному разу;
f) A является проекцей разрешимого подмножества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на первую координату.

14. Докажите, что не все множества перечислимы. Может ли подмножество перечислимого множества быть неперечислимым?

15. Докажите, что объединение, пересечение, прямое произведение и сумма перечислимых множеств перечислимы.

16. (Теорема Поста) Докажите, что множество A разрешимо тогда и только тогда, когда и A, и $\bar{A}$ перечислимы.

17. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её график $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ перечислим. Докажите, что для любого перечислимого множества пар U найдётся вычислимая функция f, такая что $\Gamma_f \subset U$, а область определения f совпадает с проекцией U на первую координату.

18. Докажите, что образ и прообраз перечислимого множества относительно вычислимой функции перечислимы.

19. Пусть X и Y — перечислимые множества. Докажите, что существуют такие перечислимые множества X' и Y', что $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, $X' \cap Y' = \varnothing$ и $X' \cup Y' = X \cup Y$.