Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014
Теорема Клини о неподвижной точке

Функция $U\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ называется *универсальной вычислимой*, если она вычислима и для любой вычислимой функции $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся такое число n, что при всех x выполнено $U(n,x)=\varphi(x)$. Универсальная вычислимая функция $U\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ называется *главной* (или *гёделевой*), если для любой вычислимой функции $V\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся всюду определённая вычислимая функция $t\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такая что $U(t(n),x)=V(n,x)$ при всех n и x.

Если зафиксирована некоторая главная вычислимая функция U, вместо $U(n,x)$ мы будем иногда писать $\varphi_n(x)$. Заметим, что среди функций $\varphi_n(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ встречаются все вычислимые функции одного аргумента.

Теорема Клини о неподвижной точке утверждает, что для любой главной универсальной функции U и для любой всюду определённой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся такой номер n, что при всех x выполнено $U(n,x)=U(f(n),x)$. Иначе говоря, программы под номерами n и $f(n)$ вычисляются одну и ту же функцию. Номер n или функцию φ_n называют неподвижной точкой преобразования f.

1. Докажите, что в главной нумерации у каждой вычислимой функции есть бесконечно много номеров (для каждой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ найдётся бесконечно много таких n, что $\varphi_n(x)=f(x)$ для всех x).

2. Докажите, что есть две машины Тьюринга, номера которых отличаются на единицу, вычисляющие одну и ту же функцию.

3. Пусть $\varphi_{f(n)}(x)=\varphi_n(x)+1$. Объясните, почему такое преобразование f вычислимо и всюду определено. Какая вычислимая функция будет его неподвижной точкой?

4. Докажите, что существует машина Тьюринга, на любом входе печатающая свой собственный номер.

5. Докажите, что существует машина Тьюринга, печатающая на пустой ленте текст своей собственной программы.

6. Докажите, что существуют две несовпадающие машины Тьюринга, такие, что первая печатает текст программы второй, а вторая печатает текст программы первой.

7. Докажите, что существуют две несовпадающие машины Тьюринга, такие что первая печатает текст программы второй, а вторая печатает текст программы первой задом наперёд.

8. Докажите, что для любого натурального k найдутся k *разных* программ для машины Тьюринга $\pi_1,\ldots,\pi_k$, такие что для $i=1,\ldots,k-1$ машина π_i на пустом входе печатает текст следующей программы π_{i+1}, а π_k на пустом входе печатает текст π_1.

9. Докажите, что для любой вычислимой функции g найдётся n, такое что при любом x выполнено $\varphi_n(x)=n+g(x)$.