Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий.
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2012.
Лямбда-исчисление.

1. Приведите к нормальной форме λ-терм $((\lambda a.(\lambda b.ba)c)b)((\lambda c.(cb))(\lambda a.a))$

2. Приведите к нормальной форме термы:

a) $(\lambda xy.x(xxy))((\lambda xy.x(xxy))(\lambda xy.x(xy)))$,
b) $(\lambda xy.x(xy))((\lambda xy.x(xxxy))(\lambda xy.x(xy)))$,
c) $(\lambda xy.x(xy))(\lambda xy.x(xxxy))(\lambda xy.x(xy))$.

3. Приведите пример замкнутого λ-терма (комбинатора), не имеющего нормальной формы.

4. Обозначим $\Theta = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$. Докажите, что для любого комбинатора F выполнено равенство $\Theta F = F(\Theta F)$ (т.е., комбинатор (ΘF) является неподвижной точкой для F).

5. Докажите, что комбинатор $\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ тоже является комбинатором неподвижной точки.

6. Обозначим через L комбинатор

$$\lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$$

Докажите, что комбинатор $LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$ (произведение 26 копий L) является комбинатором неподвижной точки. Указание: Обратите внимание на переменную r.

Нумералами Чёрча для натуральных чисел $0, 1, 2, 3, \ldots$ называются комбинаторы

$$\underline{0} = \lambda fx.x,\ \underline{1} = \lambda fx.fx,\ \underline{2} = \lambda fx.f(fx),\ \underline{3} = \lambda fx.f(f(f(x))), \ldots$$

7. Приведите к нормальной форме комбинаторы $(\underline{2}\ \underline{3})$ и $(\underline{3}\ \underline{2})$.

8. Найдите такой комбинатор F, который является неподвижной точкой каждого нумерала $\underline{n}$, т.е.,

$$\underline{n}F = F$$

для всех натуральных n.

9. Постройте лямбда-терм F, для которого выполнено равенство

$$F = xF$$

(где x — переменная). Приводится ли данный терм F к нормальной форме?

Говорят, что комбинатор A представляет функцию $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, если для любых чисел $n_1, \ldots, n_k$ комбинатор $(A\underline{n_1}\ \underline{n_2}\ \ldots\ \underline{n_k})$ равен нумералу Чёрча для числа $f(n_1, \ldots, n_k)$, если $f(n_1, \ldots, n_k)$ определено, и не имеет нормальной формы в противном случае.

10. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел:

a) $n \mapsto n+1$,
b) $(n,m) \mapsto n+m$,
c) $(n,m) \mapsto n \cdot m$,
d) $(n,m) \mapsto n^m$,
e) $n \mapsto (n+3)^2$,
f) $(n,m) \mapsto \max\{n,m\}$,
g) $n \mapsto \lfloor\sqrt{n}\rfloor$,
h) $n \mapsto \lceil\sqrt{n}\,\rceil$.

11. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел:

a) $n \mapsto \begin{cases} n-1, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases}$
b) $(n,m) \mapsto \max\{n-m, 0\}$.

12. Обозначаем **False** $= \lambda xy.y$ и **True** $= \lambda xy.x$. Постройте комбинатор **IsZero** такой, что

$$\mathbf{IsZero}(\underline{n}) = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n = 0, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

13. Постройте комбинаторы, которые представляют следующие функции натуральных чисел :

a) $n \mapsto n!$ (факториал числа),
b) $n \mapsto \lceil\log n\rceil$,
c) остаток от деления n на m,
d) неполное частное от деления n на m.

14. Прямым вычислением приведите к нормальной форме **Fac** $\underline{2}$ и **Fac** $\underline{3}$, где **Fac** – комбинатор, представляющий функцию $n!$.

15. Постройте комбинаторы, которые по нумералу Чёрча для числа n вычисляют нумерал Чёрча для числа φ_n, где

a) $\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \quad \text{(числа Фибоначчи)} \\ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}, & \text{если } n > 1, \end{cases}$
b) $\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \quad \text{(числа Фибоначчи по модулю 3)} \\ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \bmod 3, & \text{если } n \geq 2, \end{cases}$
c) $\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0, \\ 0 & \text{если } n = 1, \\ 2\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} & \text{если } n > 1, \end{cases}$
d) $\varphi_n = \begin{cases} 2 & \text{если } n = 0, \\ 3 & \text{если } n = 1, \\ \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} & \text{если } n > 1. \end{cases}$

16. Постройте комбинатор, представляющий в λ-исчислении функцию чётности:

$$\mathbf{Even}(\underline{n}) = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ \mathbf{False}, & \text{если } n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

17. Постройте комбинаторы **GT**, **LE**, **EQ** такие, что

a) $\mathbf{GT}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n > m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

b) $\mathbf{LE}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \le m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

c) $\mathbf{EQ}\ \underline{n}\ \underline{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n = m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе}. \end{cases}$

18. Постройте комбинатор **choose**, который представляет функцию двух аргументов C_n^k (число сочетаний из n по k), определённую для $n \ge k$. Не забудьте проверить, что при $n < k$ терм (**choose** $\underline{n}$ $\underline{k}$) не имеет нормальной формы.

19. Постройте комбинатор **Prime** такой, что

$$\mathbf{Prime}\ \underline{n} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если число } n \text{ простое}, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе} \end{cases}$$

(проверка числа на простоту).

20. Постройте комбинатор **NthPrime**, который по нумералу Чёрча n находит n-ое простое число. (Для определённости потребуем, чтобы **NthPrime** $\underline{0} = \underline{1}$.)

21. Найдите какую-нибудь неподвижную точку комбинатора прибавления единицы **Inc**. Есть ли у неё нормальная форма?

22. В *стрелочной нотации Кнута* для положительных целых чисел a, b используются обозначения $a \uparrow b = a^b$ (a в степени b), $a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a) \ldots)}_{b \text{ раз}}$,

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n-1} (\ldots \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n-1} a) \ldots)}_{a \text{ встречается } b \text{ раз}};$$

n-ым числом Аккермана называют $Ack_n = n \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow}_{n} n$. Вычислите первые три числа Аккермана. Постройте комбинатор **Ack**, который преобразует нумерал $\underline{n}$ (для $n > 0$) в нумерал, выражающий n-ое число Аккермана.