МФТИ, ФИВТ, специальность ПМФ, 2011–2012.
Вопросы экзаменационных билетов по курсу
Математическая логика и теория алгоритмов.
Д. В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

Осенний семестр.

1. **Элементарная теория множеств.**

   1.1. Понятия множества и принадлежности множеству. Подмножество. Операции над множествами, тождества. Пары и кортежи. Декартово произведение и декартова степень. Свойства, отношения и предикаты произвольной валентности. Отношения эквивалентности. Теорема о разбиении на классы эквивалентности.

   1.2. Отображения и соответствия. Инъекции, сюръекции, биекции. Образ и прообраз множества при соответствии. Свойства. Композиция отображений или соответствий, её некоммутативность. Единичное отображение. Обратное соответствие. Свойства.

   1.3. Сравнение множеств по мощности. Свойства. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётные и несчётные множества. Примеры. Теорема Кантора.

   1.4. Частично упорядоченные множества и линейно упорядоченные множества. Диаграммы Хассе. Понятия наибольшего и наименьшего, максимального и минимального элементов, их свойства. Сложение, умножение и декартово умножение упорядоченных множеств. Обратный порядок. Свойства. Примеры.

   1.5. Изоморфизмы упорядоченных множеств. Примеры. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без первого и последнего элемента.

2. **Логика высказываний.**

   2.1. Пропозициональные формулы и булевы функции. Вычисление истинностного значения формулы. Тавтологии и противоречия. Примеры. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Полиномы Жегалкина. Построение нормальных форм для произвольной функции.

   2.2. Полные и неполные системы связок. Примеры. Теорема Поста (критерий полносты системы связок).

   2.3. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Понятия вывода и выводимой формулы. Корректность исчисления высказываний. Вывод формулы $A \to A$ в исчислении высказываний. Лемма о дедукции и её применения.

2.4. Лемма о выводимости формулы или её отрицания из литералов, соответствующих значениям переменных. Полнота исчисления высказываний.

3. **Языки первого порядка и логика предикатов.**

3.1. Языки первого порядка: сигнатура, построение термов и формул. Свободные и связанные вхождения переменных. Параметры формулы. Интерпретация языка первого порядка. Определение истинности формулы. Истинность формулы зависит только от значений её параметров.

3.2. Выразимость предикатов: определение, примеры. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Сохранение выразимых предикатов при автоморфизме. Примеры невыразимых предикатов.

3.3. Теории и модели. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка. Примеры.

3.4. Исчисление предикатов: аксиомы и правила вывода. Правило обобщения. Корректность исчисления предикатов. Лемма о дедукции для исчисления предикатов.

Весенний семестр.

1. **Вычислимость.**

1.1. Машины Тьюринга. Определение вычислимой функции по Тьюрингу. Тезис Чёрча. Существование невычислимых функций.

1.2. Разрешимые и перечислимые множества. Эквивалентность определений перечислимого множества: область определения вычислимой функции, множество значений вычислимой функции, проекция некоторой разрешимого множества $A \subset \mathbb{N}^2$ на первую координату.

1.3. Замкнутость разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста о перечислимых и коперечислимых множествах.

1.4. Нумерации вычислимых функций. Главные нумерации вычислимых функций. Универсальная машина Тьюринга и универсальная вычислимая функция.

1.5. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

1.6. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости нетривиальных свойств вычислимых функций.

1.7. Теорема Клини о неподвижной точке (теорема о рекурсии).

1.8. Понятие m-сводимости и сводимости по Тьюрингу. Сводимость произвольного перечислимого множества к задаче самоприменимости.

1.9. Классы Σ_n и Π_n, их замкнутость относительно объединения и пересечения.

1.10. Множества $\mathbf{0}^{(n)}$. Вычисления с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$: разрешимость множеств из Σ_n и перечислимость множеств из Σ_{n+1}.

1.11. Теорема об арифметической иерархии.

1.12. Машины с битовыми стеками. Теорема об универсальности модели: всякая вычислимая по Тьюрингу функция вычислима некоторой машиной с битовыми стеками.

1.13. Бета-функция Гёделя. Лемма о кодировании конечных последовательностей парой натуральных чисел.

1.14. Теорема о представлении в формальной арифметике разрешимых множеств. Множество арифметично тогда и только тогда, когда оно представимо в формальной арифметике.

1.15. Первая теорема Гёделя о неполноте. Вторая теорема Гёделя о неполноте (без доказательства).

2. **λ-исчисление.**

2.1. Чистое λ-исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ-термов: α-конверсии, β-редукции. Определение эквивалентности (равенства) λ-термов, нормальная форма λ-терма. Теорема Чёрча–Россера (без доказательства).

2.2. Нумералы Чёрча. Представление в λ-исчислении простейших арифметических операций (прибавление единицы, сложение, умножение).

2.3. Логические операции в λ-исчислении. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.

2.4. Комбинатор неподвижной точки. Теорема о неподвижной точке для λ-исчисления. Комбинатор, представляющий функцию факториал.

3. **Трансфинитная индукция.**

3.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.

3.2. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Лемма о представлении произвольного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$. Лемма об объединении начальных отрезков.

3.3. Сравнимость любых двух вполне упорядоченных множеств.

3.4. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено (без доказательства). Сравнимость мощностей любой пары множеств.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. 4-е изд., доп., М.: МЦНМО, 2012.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 2. Языки и исчисления.4-е изд., доп., М.: МЦНМО, 2012.
3. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. 4-е изд., доп., М.: МЦНМО, 2012.
4. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.
5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.
7. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
2. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
3. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.

Дополнительные билеты.

1. Неразрешимость проблемы равенства в полугруппах. (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Вычислимые функции*).
2. Теорема Мучника–Фридберга о существовании двух перечислимых взаимно несводимых множеств (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Вычислимые функции*).
3. Существование нумерации вычислимых функций, в которой каждая функция имеер ровно один номер (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Вычислимые функции*).
4. Теорема Чёрча о неразрешимости выводимсти в исчислении предикатов. (см. Дж. Булос, Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*).
5. Разрешимость арфиметики Пресбургера (со сложением, но без умножения). (см. Дж. Булос, Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*).

6. Лемма Гильберта–Бернайса и доказательство второй теоремы Гёделя о неполноте (см. Дж. Булос, Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*).

7. Теорема о последовательностях Гудстейна (см. статьи A. Caicedo, *Goodstein's function* или W. Sladel, *The Termite and the Tower: Goodstein sequences and provability in PA*).

8. Доказательство теоремы Чёрча–Россера. (см. Х. Барендрегт, *Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика*; Henk Barendregt, Erik Barendsen, *Introduction to Lambda Calculus*)

9. Парадокс Банаха–Тарского (см. И. Ященко, *Парадоксы теории множеств*; В.С. Губа, С.М. Львовский, *Парадокс Банаха–Тарского*).

10. Теорема о невозможности разрезать куб на конечное число многогранников, из которых можно было бы сложить правильный тетраэдр. (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*).

11. Любые два выпуклых множества на плоскости могут быть отделены прямой. (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*).

12. Равномощность A и $A \times A$ для каждого бесконечного множества A (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*).