

МФТИ, ФИВТ, специальность ПМФ. Весна 2014.
Программа курса
Математическая логика.
Д.В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

1. Трансфинитная индукция.

- 1.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.
- 1.2. Метод трансфинитной индукции, примеры его применения.
- 1.3. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Представление произвольного собственного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$.
- 1.4. Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств.
- 1.5. Ординалы, определения и основные свойства.
- 1.6. Всякое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому ординалу.
- 1.7. Теорема о существовании ординалов сколь угодно большой мощности.
- 1.8. Парадокс Бурали-Форти: не существует множества всех ординалов.
- 1.9. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено.
- 1.10. Сравнимость мощностей любой пары множеств.
- 1.11. Лемма Цорна.
- 1.12. Декартово произведение бесконечного A и счетного B равномошно A . Следствие: мощность объединения бесконечных A и B имеет мощность $\max\{|A|, |B|\}$.
- 1.13. Равномощность бесконечного множества A и его декартова квадрата $A \times A$.

2. Вычислимость.

- 2.1. Формальное определение алгоритма, машины Поста. Тезис Чёрча.
- 2.2. Определение вычислимой функции. Существование невычислимых функций.
- 2.3. Разрешимые и перечислимые множества.

- 2.4. Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста о перечислимых и коперечислимых множествах.
- 2.5. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.
- 2.6. Универсальные вычислимых функций. Главные универсальные вычислимые функции. Универсальная машина Поста и теорема о существовании главной универсальной вычислимой функции.
- 2.7. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости любых нетривиальных свойств вычислимых функций.
- 2.8. Теорема Клини о неподвижной точке.
- 2.9. Понятия m -сводимости, простейшие свойства. Сводимость произвольного перечислимого множества к задачам останковки и самоприменимости; m -полнота.
- 2.10. Классы Σ_n и Π_n , их замкнутость относительно объединения и пересечения.

3. Лямбда-исчисление.

- 3.1. Чистое λ -исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ -термов: α -конверсия, β -редукция, η -редукция. Определение эквивалентности (равенства) λ -термов, λ -термы в нормальной форме.
- 3.2. Формулировка теоремы Чёрча–Россера. Единственность нормальной формы. Возможность приведения к нормальной форме без использования операций, обратных к β -редукции и η -редукции.
- 3.3. Нумералы Чёрча. Представление в λ -исчислении операции прибавления единицы, сложения, умножения, возведения в степень.
- 3.4. Логические операции в λ -исчислении: кодирование истины и лжи, а также комбинаторы, представляющие операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.
- 3.5. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.
- 3.6. Теорема о неподвижной точке для λ -исчисления: для всякого комбинатора G найдется такой комбинатор X , что $X = G X$. Комбинаторы Тьюринга.
- 3.7. Построение комбинатора, представляющего функцию факториала.

4. Формальная арифметика и доказуемость.

- 4.1. Классы Σ_n и Π_n , их замкнутость относительно объединения и пересечения.
- 4.2. Класс Σ_1 совпадает с классом всея перечислимых множеств.
- 4.3. Теорема об арифметической иерархии: $\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$ для любого n (без доказательства). Следствие: $\Sigma_n \neq \Pi_n$ для всех $n > 0$.
- 4.4. Теорема о представлении в языке формальной арифметики множеств арифметической иерархии (без доказательства). Теорема о неразрешимости множества истинных замкнутых формул формальной арифметики. Первая теорема Гёделя о неполноте.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.
3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.
5. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.
3. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
4. Успенский В.А. Машина Поста. М.: Наука, 1988.
5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.
6. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
7. Шёнфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
8. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.
9. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980.