МФТИ, ФИВТ, специальность ПМИ. Весна 2014.
Программа курса

Математическая логика и теория алгоритмов.

Д.В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

1. **Трансфинитная индукция.**

   1.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.

   1.2. Метод трансфинитной индукции, примеры его применения.

   1.3. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Представление произвольного собственного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$.

   1.4. Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств.

   1.5. Ординалы, определения и основные свойства.

   1.6. Всякое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому ординалу.

   1.7. Теорема о существовании ординалов сколь угодно большой мощности.

   1.8. Парадокс Бурали-Форти: не существует множества всех ординалов.

   1.9. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено.

   1.10. Сравнимость мощностей любой пары множеств.

   1.11. Лемма Цорна.

   1.12. Декартово произведение бесконечного A и счетного B равномощно A. Следствие: мощность объединения бесконечных A и B имеет мощность $\max\{|A|, |B|\}$.

   1.13. Равномощность бесконечного множества A и его декартова квадрата $A \times A$.

2. **Вычислимость.**

   2.1. Универсальные вычислимых функций. Главные универсальные вычислимые функции. Универсальная машина Тьюринга и теорема о существовании главной универсальной вычислимой функции.

   2.2. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости любых нетривиальных свойств вычислимых функций.

   2.3. Теорема Клини о неподвижной точке.

2.4. Понятия m-сводимости, простейшие свойства. Сводимость произвольного перечислимого множества к задаче о самоприменимости; m-полнота.

2.5. Вычисления с оракулом. Сводимость по Тьюрингу, её простейшие свойства. Для каждого оракула существует функция, невычислимая с данным оракулом. Множества $\mathbf{0}^{(n)}$.

3. **Лямбда-исчисление.**

3.1. Чистое λ-исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ-термов: α-конверсия, β-редукция, η-редукция. Определение эквивалентности (равенства) λ-термов, λ-термы в нормальной форме.

3.2. Формулировка теоремы Чёрча–Россера. Единственность нормальной формы. Возможность приведения к нормальной форме без использования операций, обратных к β-редукции и η-редукции.

3.3. Нумералы Чёрча. Представление в λ-исчислении операции прибавления единицы, сложения, умножения, возведения в степень.

3.4. Логические операции в λ-исчислении: кодирование истины и лжи, а также комбинаторы, представляющие опереции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

3.5. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.

3.6. Теорема о неподвижной точке для λ-исчисления: для всякого комбинаторна G найдется такой комбиантор X, что $X = G\,X$. Комбинаторы Тьюринга.

3.7. Построение комбинатора, представляющего функцию факториал.

4. **Формальная арифметика и доказуемость.**

    4.1. Классы Σ_n и Π_n, их замкнутость относительно объединения и пересечения.

    4.2. Теорема об арифметической иерархии: $\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$ для любого n (без доказательства). Следствие: $\Sigma_n \neq \Pi_n$ для всех $n > 0$.

    4.3. Лемма о представлении в языке формальной арифметике конечных последовательностей натуральных чисел.

    4.4. Представление в формальной арифметике разрешимых и перечислимых множеств. Множество представимо в языке формальной арифметики тогда и только тогда, когда оно принадлежит арифметической иерархии.

    4.5. Теорема о неразрешимости множества истинных замкнутых формул формальной арифметики. Первая теорема Гёделя о неполноте.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.

2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.

3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.

5. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.

3. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.

4. Успенский В.А. Машина Поста. М.: Наука, 1988.

5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.

6. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

7. Шёнфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
8. Манин Ю.И. Доказемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.
9. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980.