Кондратьева Володи

дан

Взаимно-однозначные соответствия

АН 1 / 01.04.88

Если с каждым элементом x множества A (запись: $x \in A$) сопоставлен некоторый элемент множества B, то говорят, что задана функция (отображение), определенная на A со значениями в B. Если f – такая функция (запись: $f\colon A \to B$), то через $f(x)$ обозначают элемент, сопоставляемый функцией f с элементом x. Его называют значением f на x. Говорят, что f "отображает" x в $f(x)$. (Запись: $f\colon x \mapsto f(x)$.) Функция $f\colon A \to B$ называется вложением, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$, и наложением, если для всякого элемента $b \in B$ найдется такое $a \in A$, что $f(a) = b$. Функцию, являющуюся и вложением, и наложением, называют взаимно-однозначным соответствием. Композицией функций $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ называется функция $g \circ f\colon A \to C$, для которой $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Функция $g\colon B \to A$ называется обратной к $f\colon A \to B$, если $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$ (через id_X обозначается тождественная функция $id_X\colon X \to X$, для которой $id_X(x) = x$ для всех $x \in X$).

1. (Упражнения на определения.) (а) Для каких функций $f\colon A \to B$ существует "левая обратная" (функция $g\colon B \to A$, для которой $g \circ f = id_A$)? А "правая обратная"? (б) На какие функции можно "сокращать слева" (т.е. из $f \circ g = f \circ h$ следует $g = h$)? А справа? (в) Может ли функция иметь несколько левых обратных? Правых обратных? Просто обратных? (г) Может ли функция иметь левую и правую обратные, которые не совпадают? (д) Может ли отображение множества в себя быть вложением, но не наложением? А наоборот?

2. (Взаимно однозначные сответствия конечных множеств.) (а) На окружности взято 1000 черных точек и 1 белая. Каких многоугольников с вершинами в этих точках больше: тех, у которых все вершины черные, или тех, у которых есть белая вершина? (б) Доказать, что число подмножеств конечного множества, содержащих нечетное число элементов, равно числу его подмножеств, содержащих четное число элементов. (в) Доказать, что число решений уравнения $x+y+z=100$ в неотрицательных целых x, y, z равно числу двухэлементных подмножеств 102-элементного множества.

3. (Взаимно однозначные соответствия в геометрии.) Построить взаимно однозначное соответствие между: (а) отрезками разных длин; (б) отрезком без концов и прямой; (в) отрезком и прямой; (г) отрезком и квадратом (с внутренностью).

4. (Взаимно однозначные соответствия с $\mathbb{N}$.) Построить взаимно однозначные соответствия между множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел и (а) множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел; (б) множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел; (в) множеством алгебраических чисел (корней многочленов с рациональными коэффициентами).

5. (Разные взаимно однозначные соответствия.) Построить взаимно однозначные соответствия между (а) множеством бесконечных последовательностей цифр 0 и 1 и множеством бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3; (б) множеством бесконечных последовательностей цифр 0 и 1 и множеством бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2; (в) множеством всех подмножеств $\mathbb{N}$ и множеством бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

6. (Изоморфизм порядков.) (а) Существует ли взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{Q} \cap \,]0, 1[\, \to \mathbb{Q}$, сохраняющее порядок (т.е. такое, что из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$)? (б) Тот же вопрос для $f\colon \mathbb{Q} \to D$, где D – множество всех десятично-рациональных чисел (чисел вида $m/10^n$, где m, n – целые).

7. (Изоморфизм структур одноместных функций.) Существует ли такая взаимно однозначная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что (а) $f(5n + 7) = 13f(n) + 17$; (б) $f([n/2]) = [f(n)/3]$ ($[x]$ – целая часть x) для всех натуральных n? $f\colon \mathbb{N} \cup \{0\}$

8. (Конгруэнтность.) Два множества точек A, B называют конгруэнтными, если существует взаимно однозначное соответствие $f\colon A \to B$, сохраняющее расстояния (расстояние между X, Y равно расстоянию между $f(X)$, $f(Y)$). (а) Доказать, что если два множества точек плоскости конгруэнтны, то существует движение, переводящее одно в другое. (б) Может ли множество точек плоскости быть конгруэнтно своему подмножеству, не совпадающему с ним? (в) Тот же вопрос для ограниченного множества (содержащегося в некотором круге). (г) Конгруэнтны ли множества $\mathbb{Q} \cap \,]-\infty, \sqrt{2}[$ и $\mathbb{Q} \cap \,]-\infty, \sqrt{3}[$? (д) Представить каждое из множеств предыдущей задачи в виде объединения двух непересекающихся частей так, чтобы первая часть первого множества была конгруэнтна первой части второго, а вторая – второй.

9. (Картография.) Можно ли изобразить участок сферы на плоскости с сохранением (а) расстояний; (б) углов; (в) площадей?