Кондратьев В.

АН 10
15.04
1989г

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

1. (Теорема о КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ) Докажите, что, двигаясь со скоростью $\le C$, нельзя за время T уехать дальше, чем на расстояние CT (т.е. если у функции f на $[a,b]$ производная существует и $f' \le M$, то $f(b)-f(a) \le M\cdot(b-a)$).

2. Теоремы О СРЕДНИХ: а) (Теорема ФЕРМА или НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА) Пусть функция f дифференцируема в точке a и имеет в этой точке ЛОКАЛЬНЫЙ МАКСИМУМ (или МИНИМУМ) <$\Longleftrightarrow$ $f(x)\le f(a)$ (соотв. $f(x)\ge f(a)$) для всех x из некоторой окрестности точки a>. Докажите, что тогда $f'(a)=0$.
Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Докажите, что
б) (Теорема РОЛЛЯ) если $f(a)=f(b)$, то существует точка $c\in]a,b[$ тч $f'(c)=0$;
в) (Теорема ЛАГРАНЖА) существует точка $c\in]a,b[$ тч $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$;
г) (Теорема ДАРБУ) если $K\in]f'(a),f'(b)[$, то существует $c\in]a,b[$ тч $f'(c)=K$.

3. Докажите, что если функция f а) дифференцируема и не убывает, то $f' \ge 0$;
б) имеет на $]a,b[$ знакопостоянную производную, то f монотонна;
в) непрерывна и $f'\le 0$ слева от точки a и $f'\ge 0$ справа, то у f в a минимум;
г) дважды дифференцируема, $f'(a)=0$ и $f''(a)<0$, то у f в a максимум.

4. Что больше а) e^{π} или π^e; б) $\log_{101}100$ или $\log_{100}99$; в) $3\sin 2^{\circ}$ или $2\sin 3^{\circ}$?

5. (Интегрирование неравенств) Докажите, что при $x>0$
а) если $f'<g'$ на $]0,x[$ и $f(0)<g(0)$, то $f(x)<g(x)$; б) $x-x^2/2<\ln(1+x)<x-x^2/2+x^3/3$
в) $1+x/2-x^2/8<\sqrt{1+x}<1+x/2$; г) $x-x^3/6<\sin x<x-x^3/6+x^5/5!$; д) $\operatorname{tg} x>x+x^3/3$, $x<\pi/2$.

6. Разложите в ряд по степеням x функцию а) $\sin x$; б) $\ln(1+x)$; в) $\sqrt{1+x}$.

7. Найдите число корней уравнения а) $x^{100}-57x^{10}+x+1=0$; б) $x^4-4x^3+8x^2-a=0$;
в) $x^3+px+q=0$; г) $\sin x = x/4$; д) $\ln x = ax^2$; е) $(1/16)^x = \log_{1/16} x$.
<Указание: если f' имеет n корней, то у f их не более $n+1$>

8. (Многочлены) Докажите, что если а) $f'(x)=0$ при всех x, то $f(x)=\mathrm{const}$;
б) $\exists n\ \forall x\quad f^{(n)}(x)=0$, то f – многочлен степени $\le n-1$;
в) f бесконечно дифференцируема и $\forall x\,\exists n\ \ f^{(n)}(x)=0$, то существует отрезок, на котором f – многочлен; г)* f та же, что выше, то f – многочлен на $\mathbb{R}$.

9. Далеко ли можно добраться на автомобиле от точки А на шоссе, если через час надо вернуться обратно, а ускорение (по модулю) не превосходит 10 ?

10. (Дифференциальные уравнения) Найдите все функции f на прямой, такие что
а) $f'=f$ <ук: рассмотрите $\phi(x):=f(x)/e^x$>; б) $f''=-f$ <ук: $f^2+(f')^2=\mathrm{const}$>.
в) Пусть $f\le f'$ и $f(1)=2$. Докажите, что тогда $f(5)\ge 2e^4$.
г) Пусть $f(a)=f(b)=0$ и $f''+f\ge 0$. Докажите, что тогда $|b-a|\ge\pi$.

$]a,b[\ f>0$

11. Пусть функция f – φ-дифференцируема в окрестности точки a. Докажите, что
а) ("Теорема БЕЗУ") если a – корень f, то f делится на $(x-a)$ <т.е. существует φ-дифференцируемая функция ϕ тч $f(x)=(x-a)\cdot\phi(x)$> ;
б) если $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0$ и $f^{(k)}(a)\ne 0$, то $k=\max\{n: f$ делится на $(x-a)^n\}$ т.е. a – корень кратности k.
в) Может ли корень иметь бесконечную кратность, если $f(x)\ne 0$ при $x\ne a$?
г) Можно ли в а) заменить φ-дифференцируемость на непрерывность?

12. Пусть f имеет n производных в d-окрестности точки a. Докажите, что
а) если в a $f=f'=\ldots=f^{(n-1)}=0$ то $|f(x)|<M(x-a)^n/n!$, где $M=\max|f^{(n)}|$ на $[a-d,a+d]$;
б) существует ровно один многочлен $p(x)$ степени $\le n-1$ тч $f-p$ имеет в a корень кратности $\ge n$ и найдите коэффициенты $p(x)$ в случае $a=0$.
в) (Формула ТЭЙЛОРА) $\exists c\in[a,x]\quad f(x)= f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}f^{(k)}(a)\cdot(x-a)^k/k! + f^{(n)}(c)\cdot(x-a)^n/n!$.

13. Разложите в ряд Тэйлора в окрестности нуля (и найдите где он сходится)
а) e^x ; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $\ln(1+x)$; д) $\operatorname{arctg} x$; е) $(1+x)^a$, $a\in\mathbb{R}$.

14. Докажите, что а) $1-1/2+1/3-1/4+\ldots=\ln 2$; б) $1-1/3+1/5-1/7+\ldots=\pi/4$.
в) Предложите способ вычисления π с большой точностью за разумное время.

15. Существует ли бесконечно дифференцируемая функция, тч ее ряд Тэйлора
а) сходится при всех x, но не к $f(x)$; б) расходится при всех $x\ne 0$?

1	2а б в г	3а б в г	4а б в	5а б в г д	6а б в	7а б в г д е	8а б в г
Аш	9.9 9.9 14.11	9.9 15.11	25.11	9.9 25.11 20.9 25.11	20.9		9.9 15.11

9	10а б в г	11а б в г	12а б в	13а б в г д е	14а б в	15аб
	Аш Аш					