Кондратьев

И Н Т Е Г Р А Л

АН 11
01.09.89

Пусть $f : [a, b] \to R$. Мы хотим строго определить ИНТЕГРАЛ от f по $[a, b]$ (нестрого — это площадь фигуры, ограниченной графиком функции, отрезком и прямыми $x=a$ и $x=b$).

Набор точек $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ называется РАЗБИЕНИЕМ отрезка $[a,b]$. ВЕРХНЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММОЙ ограниченной функции f относительно разбиения называется число $\sum d_i M_i$, где d_i — длина i-го отрезка разбиения, а M_i — точная верхняя грань функции f на этом отрезке. Аналогично определяются НИЖНИЕ интегральные суммы.

1. (а) Докажите, что при добавлении новых точек к разбиению верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя — не уменьшается; (б) ...любая нижняя сумма не превосходит любой верхней. (в) Может ли верхняя интегральная сумма для разбиения на 10 равных частей быть меньше, чем для разбиения на 11?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если ТВГ всех нижних интегральных сумм функции f на отрезке совпадает с ТНГ верхних интегральных сумм, то функция f называется ИНТЕГРИРУЕМОЙ на отрезке, а их общее значение — ее ИНТЕГРАЛОМ. Обозначение: $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. (а) Приведите примеры интегрируемой и неинтегрируемой ограниченных функций. (б) Докажите, что ограниченная функция интегрируема, если она монотонна. (в) ...непрерывна. <Указание. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.> (г)...имеет конечное число точек разрыва. д*) ...счетное число точек разрыва. е*) Может ли всюду разрывная функция быть интегрируемой?

3. Найдите (а) $\int_0^1 x\,dx$ (б) $\int_0^1 x^2 dx$ (в) $\int_0^1 x^n dx$ (г) $\int_0^\pi \sin x\,dx$

4. Докажите, что (а) сумма интегрируемых функций интегрируема; б) произведение интегрируемых функций интегрируемо.

5. Докажите, что (а) $\int_a^b Af+Bg=A\int_a^b f+B\int_a^b g$ (б) $f\le g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

(в) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$; (г) $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ (дайте точные формулировки).

6. (а) Интеграл неотрицательной непрерывной функции равен 0. Докажите, что она равна 0. (б*) Постройте пример неотрицательной интегрируемой функции с интегралом 0, отличной от 0 на несчетном множестве.

7. Докажите, что функция интегрируема тогда и только тогда, когда ее можно заключить между двумя непрерывными функциями со сколь угодно малой разницей интегралов.

8. Функция f непрерывна на $[a,b]$. Найдите предел $\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f$

9. (а) Верхняя интегральная сумма функции f для некоторого разбиения на 10 отрезков равна 1, функция f ограничена сверху числом 10. Докажите, что верхняя интегральная сумма для любого разбиения, в котором все отрезки не длиннее 0,001, не превосходит 1,1. (б) Пусть на каждом отрезке разбиения выбрано по точке y_i. Число $\sum f(y_i)d_i$ (d_i — длина соответствующего отрезка) называется РИМАНОВОЙ СУММОЙ. Докажите, что если функция интегрируема, а максимальная длина отрезков разбиения стремится к нулю, то римановы суммы стремятся к интегралу.

10* (Критерий ЛЕБЕГА). Множество $A \subset R$ называется множеством МЕРЫ НУЛЬ, если для любого $\varepsilon>0$ его можно покрыть счетным числом интервалов, сумма длин которых меньше ε. Докажите, что ограниченная функция f на отрезке интегрируема тогда и только тогда, когда множество точек разрыва f имеет меру нуль.

11. Какие из следующих интегралов разумно считать конечными, какие бесконечными, а какие — неопределенными:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx;\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx;\quad \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx;\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx;\quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$$

12. Функция f неотрицательна и убывает на $[1, \infty[$. Докажите, что ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда интеграл $\int_1^\infty f$ конечен.

1аб	в	2аб	в	г	д	е	3аб	в	г	4аб	5аб	в	г	6аб	7	8	9аб	10	11	12