Кондратьев

ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

АН 12
13.09.89

Эта формула, носящая титул Основной Теоремы Анализа, связывает интеграл и первообразную.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция F называется ПЕРВООБРАЗНОЙ функции f на множестве M, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из M. По умолчанию M – область определения f.

1. а) Найдите все первообразные функции sin x; б)... 1/x. в) Может ли функция не иметь первообразной? г) Докажите, что у непрерывной на отрезке функции существует первообразная <Ук.: АН11.8>.

2. (Формула Н–Л) Пусть F – первообразная функции f на [a,b]. Докажите, что $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, если f а) непрерывна; б)* интегрируема. в)* Верна ли Н–Л если про f известно лишь, что она ограничена?

3. Вычислите а) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; б) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$; в) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$; г) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$; д) $\int_1^{\infty} dx/x^2$; е) $\int_{-1}^{1} dx/\sqrt{|x|}$; ж) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx/1+x^2$.

4. а) Найдите $\lim(1/(n+1)+1/(n+2)+\ldots+1/2n)=\lim(1-1/2+1/3-\ldots-1/2n)$. Положим $\Gamma_n := 1+1/2+1/3+\ldots+1/n$. Докажите, что б) $0<\Gamma_n-\ln n<1$; в) $\exists \lim(\Gamma_n-\ln n) =: C$ (постоянная ЭЙЛЕРА). г)* Найдите $\lim n(\Gamma_n-\ln n-C)$.

5. Найдите производную функции $f(x)=$ а) $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$; б) $\int_{x^2}^{x^3}\sin\sqrt{t}\,dt$.

6. Докажите, что тригонометрический полином $f(x)=\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ имеет корень.

7. (Интегрирование по частям) а) Пусть F – первообразная функции $f'g$. Доказать, что тогда $fg-F$ – первообразная функции fg'. б) Докажите, что $\int_a^b fg' = fg\big|_a^b - \int_a^b f'g$, где $F\big|_a^b = F(b)-F(a)$.

8. Найдите а) первообразную $x\sin x$; б)..$x^2\cdot 2^x$; в)..$\cos x\cdot e^x$; г)..$\ln x$; д) $\int_0^{2\pi} x^n\cos x\,dx$; е) $\int_0^1 \ln x\,dx$.

9. Найдите а) $\lim \int_0^1 e^{x^2}\sin(nx)\,dx$; б) $\lim n\int_0^{\pi} e^{x^2}\cos(nx)\,dx$; в) $\lim \int_0^1 \sqrt{x}\cdot|\sin(nx)|\,dx$.

10* (Эргодическая теорема). Пусть f – непрерывная периодическая функция с периодом 1. Докажите, что $\forall x\in R$ $\forall a\in R-Q$ последовательность средних $1/n\sum_{k=1}^{n} f(x+ka)$ стремится к среднему значению функции т.е. $\int_0^1 f$.

11 (Формула Тейлора с интегральным остаточным членом). Пусть f – n+1 раз непрерывно дифференцируема на отрезке [a−b;a+b]. Докажите, что а) если $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$, то $f(x)= 1/n!\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$; б) $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+(x-a)^n/n!\,f^{(n)}(a)+1/n!\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$; ? в) Выведите из 11б формулу Тейлора из листка АН10.

12 (Замена переменной). Докажите, что а) если F – первообразная функции f, то $F(g(x))$ – первообразная функции $f(g(x))\cdot g'(x)$; б) $\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$;

13. Найдите первообразные (вспомните предварительно чему равны производные ln x, arctg x, arcsin x) а) $\cos(5x-3)$; б) $\sin x\cdot\sqrt{\cos x}$; в) $x(1+x^2)^{10}$; г) $\ln x/x$; д) $1/(2-3x)$; е) $(2x-1)/(x-2)$; ж) $1/(4x^2-1)$; з) $1/(4x^2+1)$; и) $x/(4x^2+1)$; к) $x^3/(x^2+2x+2)$; л) $1/\sqrt{1-4x^2}$.

14. Пусть g – непрерывная положительная функция а) Докажите, что функция y, обратная к $x = h(y) := \int_{y_0}^{y} dt/g(t) + x_0$, является решением дифференциального уравнения $y'=g(y)$, удовлетворяющим условию $y(x_0)=y_0$. б) Может ли таких решений быть несколько? в)* Докажите, что если g непрерывно дифференцируема, то решение единственно.

1а	б	2а	б	в		3а	б	в	г	д	е	ж	4а	б	в	г	5а	б	6	7а	б	8а	б	в	г	д	е
21 окт Шень		2.12 Вор				2.12 Вор	6.12	6.12	9 декабря →								13.12			6.12	6.12	в декабре →					13.12

7а	б	10	11а	б	в	12а	б	13а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	14а	б	в	1б	2	9б
						с декабря →					9 декабря											15.4	2.12	
						Шень →																		