Кондратьев

СОСЧИТАЕМ ИНТЕГРАЛ

АН 13
16.10.89

1. Кривая **C** на плоскости задается параметрически двумя дифференцируемыми функциями $x(t)$ и $y(t)$, где $t\in[a,b]$. Покажите, что

а) $\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ = длина кривой C; б) $\int_a^b xy'\,dt = -\int_a^b yx'\,dt = 1/2\int_a^b (xy'-x'y)\,dt$ = площадь ею ограниченная, если C несамопересекающаяся, замкнутая (т.е. $(x(a),y(a))=(x(b),y(b))$) и при движении точки $(x(t),y(t))$ по кривой C ограниченная ею область остается слева.

в) Найдите формулы для длины кривой и ограниченной ею площади, если кривая задана в полярных координатах (r,α) уравнением $r=f(\alpha)$.

2. Найдите площадь а) эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2\le 1$; б) криволинейного треугольника OAB, где $A=(x,y)$, $B=(x,-y)$ – симметричные точки гиперболы $x^2-y^2=1$ <почему ответ называется **обратным гиперболическим косинусом = arcch x**?>; в) **астроиды** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$; г) **кардиоиды** $r=1+\cos\alpha$; д) **лемнискаты** $r=\cos 2\alpha$; е) одной арки **циклоиды** – кривой, описываемой точкой единичной окружности, катящейся по прямой. <Не забудьте нарисовать все получившиеся кривые !>

3. (Неравенство ЮНГА) $xy \le x^p/p + y^q/q$ при $1/p + 1/q = 1$, $x,y,p,q \ge 0$.

4. Найдите длину а) дуги **полукубической параболы** $y^2=x^3$, $0\le x\le 4$; б) дуги параболы $y=1-x^2$, $y\ge 0$; в) дуги циклоиды <2е>; г) астроиды <2в>. д) Докажите, что длина эллипса $x^2/2+y^2=1$ равна длине горба синусоиды.

5. Найдите объем а) эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\le 1$; б) 4-мерного шара; в) n-мерной треугольной пирамиды $\{(x_1,\dots,x_n)\in R^n \mid x_1+\dots+x_n\le 1,\ x_1,\dots,x_n\ge 0\}$; г) n-мерного шара $\{(x_1,\dots,x_n)\in R^n \mid x_1^2+\dots+x_n^2\le 1\}$; д) n-1-мерной сферы в R^n (т.е. n-1-мерную площадь ее поверхности).

6. Где расположен центр тяжести а) треугольника; б) конуса; в) полуокружности; г) полукруга; д) полушара; е) полусферы ?

7. (Теоремы ГУЛЬДЕНА) Тело W получено вращением плоской кривой C, лежащей по одну сторону от оси вокруг вертикальной оси. Докажите, что а) площадь поверхности W равна произведению длины C на длину окружности, описываемой ее центром тяжести. б) объем тела W равен произведению длины окружности, описываемой центром тяжести осевого сечения на его площадь.

8. Найдите силу, действующую а) на боковую стенку куба со стороной 1м, погруженного в бассейн с водой глубины 1м; б) на единичный заряд, расположенный на расстоянии h от прямого провода, единица длины которого имеет заряд q; в) на тело массы m, находящееся на высоте H над центром круглого однородного диска массы M и радиуса R; г) между частями однородного шара с зарядом Q и радиусом R, рассеченного плоскостью, проходящей на расстоянии d от центра.

9. Какую работу надо совершить, чтобы а) удалить с Земли 1т отходов; б) погрузить в воду конический айсберг массы M высоты H, выступающий из воды на H/10; в) раскрутить шар массы M радиуса R до угловой скорости ω?

10. (**Дифференциальные уравнения**) а) Скорость распада радия пропорциональна его количеству. Как меняется его масса со временем, если через время T (**период полураспада**) она уменьшается вдвое? б) Найдите плотность воздуха и атмосферное давление на высоте H над поверхностью Земли, если давление на уровне моря равно p. в) Скорость вытекания воды из дырки у основания цилиндрической бочки объема V и высоты H равна $k\sqrt{h}$, где h – высота уровня воды, k – постоянная. За какое время бочка опорожнится? г) Как будет двигаться свободно падающее тело, если сопротивление воздуха пропорционально скорости? д) (**Цепная линия**) Найдите форму однородной тяжелой нити, подвешенной за концы, которые закреплены на одной высоте. е) (**Трактрисса**) Найдите уравнение кривой, для которой отрезок касательной от точки касания до пересечения с осью абсцисс имеет постоянную длину.

11. Найдите с точностью 1% а) $1+2^{-3}+3^{-3}+4^{-3}+\dots$; б) $1^9+2^9+\dots+100^9$. Как ведет себя с ростом N в) $1^a+2^a+\dots+N^a$; г) $N! = e^{\ln 2+\ln 3+\dots+\ln N}$; д) $\Sigma(m^2+n^2)^a$, где сумма берется по всем парам $(m,n)\in Z^2$ т.ч. $m^2+n^2\le N$?

12. (**Гамма-функция**) Пусть $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Докажите, что а) $\Gamma(n+1)=n!$; б) $\Gamma(x)$ определена при всех $x>0$; в) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. г)* Найдите $\Gamma(1/2)$.

13. Пусть $C(t)=(x(t),y(t))$ – замкнутая кривая, $C(a)=C(b)$. Докажите, что $\frac{1}{\pi}\int_a^b (y''x'-y'x'')/(x'^2+y'^2)\,dt$ – целое число и найдите его смысл.

14* Докажите, что число счастливых билетов равно $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin 10x/\sin x)^6 dx$.

1а	б	в	2а	б	в	г	д	е	3	4а	б	в	г	д	5а	б	в	г	д	6а	б	в	г	д	е

7а	б	8а	б	в	г	9а	б	в	10а	б	в	г	д	е	11а	б	в	г	д	12а	б	в	г*	13	14*
							X		9/XI																