П О С Л Е Д О В А Т Е Л Ь Н О С Т И

АН 2
01.09
1988г

Все последовательности в этом листке состоят из действительных чисел, поэтому, говоря строго, последовательность a, a, a, ... — это отображение $a: N \to R$ множества натуральных чисел в множество действительных.

Последовательность a называется ОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ если существует число, большее всех ее членов: $\exists c\ \forall i\ \ a_i < c$. Аналогично определяется ограниченность СНИЗУ. Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется ОГРАНИЧЕННОЙ.

Последовательность a называется НЕВОЗРАСТАЮЩЕЙ (соответственно, НЕУБЫВАЮЩЕЙ), если $\forall i\ \ a_i \le a_{i+1}$ (соотв. $\forall i\ \ a_i \ge a_{i+1}$), и МОНОТОННОЙ, если она невозрастающая или неубывающая.

1. Не употребляя отрицания "не", дайте определение последовательности а) неограниченной; б) немонотонной.

2. Докажите, что последовательность a ограничена, если a = а) $1+x+x^2+..+x^n$, $x < 1$; б) n; в) $1/1\cdot 2 + 1/2\cdot 3 + .. + 1/n(n+1)$; г) $1+1/2^2+1/3^2+..+1/n^2$; д) $1+1/2!+...+1/n!$; е) $\sqrt{2+\sqrt{2+..+\sqrt{2}}}$ (n двоек); ж) $(1+1/n)^n$ <Указание: бином Ньютона>; з) $n!/(n/2)^n$.

3. Докажите, что последовательность a неограничена, если a = а) $1+1/2+1/3+..+1/n$ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД) <Ук.: $a \ge n/2$>; б) a $+1/a$, $a=1$; в) $\sqrt[n]{n!}$ <Ук.: $a_n \ge n/3$>; г) $1/2+1/3+1/5+..+1/p$, p — n-е простое.

4. Докажите, что последовательность а) $(1+1/n)^n$; б) $\sqrt[n]{n}$, $n \ge 3$ монотонна.

ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ последовательности a, a, a, ... называется любая последовательность, получаемая из нее вычеркиванием некоторых членов (только так, чтобы оставшихся было бесконечно много). Например, последовательность 1,3,5,7,9,... является подпоследовательностью последовательности 1,2,3,4,...,а последовательности 1,1,2,3,.. и 3,1,5,7,...–нет.

5. Докажите, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

6. Существует ли последовательность натуральных чисел, такая что любая последовательность натуральных чисел — ее подпоследовательность?

Число A называется ПРЕДЕЛОМ последовательности a (обозначается: $a \to A$ или $\lim a_n = A$), если для любого $\varepsilon>0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, принадлежат интервалу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Иными словами: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \ |a_n - A| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел называется СХОДЯЩЕЙСЯ.

7. Скажите, не используя "не": а) A–не предел a; б) a – несходящаяся.

8. Существует ли последовательность а) ограниченная и несходящаяся; б) сходящаяся и неограниченная; в) имеющая два разных предела ?

9. Обязательно ли последовательность имеет наибольший или наименьший элемент, если она а) ограничена; б) сходится ?

10. Какое свойство последовательности получится, если изменить определения предела: а) $N\ \ \varepsilon>0\ \ n>N\ \ |a_n - A| < \varepsilon$; б) $\varepsilon>0\ \ N\ \ n>N\ \ |a_n - A| < \varepsilon$?

11. Найдите $\lim a$, где a = а) $(-1)^n/n$; б) $1/\sqrt{n}$; в) $(n^2+57n)/(n^2+1)$; г) $(\sin n)/n$; д) $1+1/3+1/9+..+1/3^n$; е) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1аб 2абвгдежз 3абвг 4аб 5 6 7аб 8абв 9аб 10аб 11абвгде