Экз. Кондратьева Володи

АРИФМЕТИКА ПРЕДЕЛОВ

АН 3
16.09
1988г

1. Последовательности a и b сходятся. Верно ли, что
   а) $\lim a_n < \lim b_n$, если $a_n < b_n$ при всех n;
   б) $\lim a_n \leq \lim b_n$, если $a_n \leq b_n$ при всех n ?

2. Последовательность a ограничена, $b_n \to 0$. Докажите, что $a_n b_n \to 0$.

Говорят, что последовательность a СТРЕМИТСЯ К БЕСКОНЕЧНОСТИ, если $\forall C\ \exists N\ \forall n>N\ |a_n|>C$. Это записывается так: $a_n \to \infty$ или $\lim a_n = \infty$. (Подумайте, что означают выражения $\lim a_n = +\infty$ и $\lim a_n = -\infty$.)

3. Докажите, что если а) $a_n \to \infty$, то все кроме конечного числа членов (это можно сказать еще так: ПОЧТИ ВСЕ члены) $a_n \neq 0$ и $1/a_n \to 0$;
   б) $a_n \to 0$ и почти все $a_n \neq 0$, то $1/a_n \to \infty$.

4. (Теорема о двух милиционерах) Последовательности a и c сходятся к одному и тому же пределу A, а b такова, что $a_n \leq b_n \leq c_n$ при всех n. Докажите, что последовательность b тоже сходится к A.

5. Последовательности a и b сходятся, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$. Докажите, что а) последовательность $a_n \pm b_n$ сходится и $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$;
   б) последовательность $a_n \cdot b_n$ сходится и $\lim a_n b_n = AB$;
   в) последовательность $1/a_n$ сходится и $\lim 1/a_n = 1/A$, если $A \neq 0$;
   г) последовательность b_n/a_n сходится и $\lim b_n/a_n = B/A$, если $A \neq 0$.
   (В 5вг надо сначала доказать, что почти все a_n отличны от нуля.)

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — произвольная последовательность. Выражение $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется РЯДОМ с членами $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Число $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ называется n-й ЧАСТИЧНОЙ СУММОЙ этого ряда. Если последовательность частичных сумм имеет предел S, то ряд называется сходящимся, а число S — его суммой. Это записывают так: $S = \sum a_n = a_1+a_2+\ldots$.

6. Докажите, что а) если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \to 0$;
   б) обратное неверно.

7. а) Докажите, что если $\lim a_n = A$, то последовательность $(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$ сходится и предел ее равен A.
   б) Верно ли обратное?
   в) Верно ли 7а для средних геометрических, если все a_n положительны?

8. Докажите, что при $n \to \infty$ а) $n^k \to \infty$ $(k>0)$; б) $n^k \to 0$ $(k<0)$; в) $a^n \to \infty$ $(a>1)$; г) $a^n \to 0$ $(0<a<1)$; д) $a^n/n \to \infty$ $(a>1)$; е) $a^n/n^k \to \infty$ $(a>1$, k-любое$)$; ж) $\sqrt[n]{2} \to 1$; з) $\sqrt[n]{a} \to 1$ $(a>0)$; и) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

9. Найдите предел последовательности, n-й член которой равен
   а) $(n^2-1)(3n^2-n+1)/(n^3-3n+2)$; б) $(2^n+7^n)/(3^n+4^n+5^n+6^n)$; в) $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$; г) $1988^n/n!$; д) $11\sqrt[n]{n!}$; е) $n/\sqrt[n]{n!}$; ж) $(2\sqrt{n} + 5\sqrt[3]{n})/(5\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n})$; з) $\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$; и) $n \cdot \sin n/\sqrt{n^3}$; к) $n \cdot \sin(1/n)$; л) $1^k+2^k+3^k\ldots+n^k/n^{k+1}$.

10. Найдите пределы рекуррентных последовательностей
   а) $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$, $a_1 = 6$; б) $a_{n+1} = 3+a_n/2$, a_1 – любое; в) $a_{n+1} = 1+1/a_n$, $a_1 = 1$; г) $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$, $a_1 \neq 0$; д) $a_{n+1} = a_n/2 + p/2a_n$, $p>0, a_1>0$; е) $a_{n+1} = \sin a_n$, a_1-любое; ж) $b_n = a_n/\sqrt{n}$, где a_1 из 10г; з) $b_n = n \cdot a_n$, где a_n из 10е.

1аб	2	3аб	4	5абвг	6аб	7абв	8абвгдежзи	9абвгдежзикл	10абвгдежз
29.09.88				29.10		18.05	29.10	[illegible]	24.5
[illegible]				[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]