ПОЛНОТА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

АН 4
18.10
1988г

Про действительные числа мы пока знаем, что их можно складывать, вычитать, умножать, делить (т.е. они образуют поле) и сравнивать между собой. Сейчас мы добавим к этим свойствам еще одно – аксиому о том, что в $\mathbb{R}$ нет "дырок". Существует много эквивалентных формулировок АКСИОМЫ ПОЛНОТЫ для $\mathbb{R}$. Вот некоторые из них (непонятные слова определяются ниже):

АП1. Пусть $A,B\subset\mathbb{R}$ и $A\le B$ (т.е. $\forall a\in A, b\in B\ a\le b$), тогда $\exists c\in\mathbb{R}$, разделяющее A и B (т.е. такое что $a\le c\le b$ для всех $a\in A, b\in B$).

АП2. Любое непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

АП3. Любая последовательность вложенных отрезков $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\ \ldots$ имеет общую точку.

АП4. Любая монотонная ограниченная последовательность сходится.

АП5. В любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

АП6. Любая фундаментальная последовательность сходится. Критерий Коши

1. Докажите, что аналог аксиомы АП1 для множества $\mathbb{Q}$ неверен.

ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНЬЮ (ТВГ) множества X называется число, которое не меньше любого элемента X (т.е. является верхней гранью X) и не больше любой в.г. X.

2. Докажите, что а) у множества не может быть более одной ТВГ;
б) число c является ТВГ X титтк $\forall x\in X\ \ c\ge x$ и $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in X: c-\varepsilon<x$;
в) из АП2 следует, что непустое ограниченное снизу множество имеет ТНГ;
г) из АП1 следует АП2 <Указание: положите $B:=$ множество в.г. множества A>;
д) из АП2 следует АП1.

3. Выведите из АП2 а) аксиому АРХИМЕДА: $\forall c,\varepsilon>0\ \exists n\in N\ \ n\varepsilon>c$;
б) существование квадратного корня из любого положительного числа.

4. Докажите, что ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ (аксиома АП3)
а) не будет верен, если отрезки заменить интервалами;
б) следует из существования ТВГ; в) эквивалентен "отсутствию дырок" (АП1).

5. Выведите из АП3, что не существует взаимно однозначного соответствия между множеством натуральных чисел и множеством точек отрезка $[0,1]$.

6. Выведите а) АП4 из АП2; б) АП3 из АП4; в) АП5 из АП3.

Последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ называется ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ (или последовательностью КОШИ), если $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N\ \ |a_m-a_n|<\varepsilon$.

7. Докажите, что а) фундаментальная последовательность ограничена;
б) сходящаяся последовательность является фундаментальной;
в) в $\mathbb{Q}$ существует фундаментальная несходящаяся последовательность; к числу из $\mathbb{Q}$
г) из АП5 следует КРИТЕРИЙ КОШИ (АП6).

8. Докажите, что АП1, АП2, АП3, АП4, АП5 и АП6 попарно эквивалентны.

Отныне мы будем считать, что во множестве $\mathbb{R}$ выполнена какая-либо (и, следовательно, все остальные) из аксиом полноты АП1–АП6. Это позволяет сильно упростить решение многих задач из АН3, а также получить много нового.

9. (ЦЕПНЫЕ ДРОБИ) Докажите, что последовательность $b_0=a_0$, $b_1=a_0+1/a_1,\ldots$, $b_n=a_0+1/(a_1+1/\ldots+1/(a_{n-1}+1/a_n)\ldots)$, ..., где $a_0,a_1,\ldots$ – произвольные натуральные числа, имеет предел. <Указание: вспомните, как вычисляются числители и знаменатели рациональных чисел b_n.>

10. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)/n^2$ сходится $\forall x$. <Ук.: критерий Коши>

11. (Число e) Последовательность $(1+1/n)^n$ монотонна и ограничена (АН2), поэтому по АП4 она имеет предел, который называется числом e (=2,7182818..) Докажите, что а) $\lim(1+2/n)^n=e^2$; б) $\lim(1-1/n)^n=1/e$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}1/n!=e$;
г) $\lim n/\sqrt[n]{n!}=e$; д) e = ц.дробь с коэфф. 2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10...

1	2а	б	в	г	д	3а	б	4а	б	в	5	6а	б	в	7а	б	в	г	8	9	10	11а	б	в	г	д
29	окт		29/10		2.9	2.11 88	—	2.11.88		—	—	14.12			14.12						—	—	—	—	—	
[illegible]			Тел		Тел	Ф		Ф				Пос			Пос											