Кондратьев Володя

Р Я Д Ы

АН 5
05.12
1988г

Строго говоря, ряды – это просто разновидность последовательностей, появившаяся в Анализе раньше всех прочих и чрезвычайно в нем распространившаяся. Аксиома полноты (особенно в формулировках АП4,АП6) позволяет доказать сходимость ряда, не зная суммы, что иногда облегчает нахождение суммы (1инр).

1. Сходится ли (и при каких x) ряд а) Σx^n; б) $\Sigma 1/n$; в) ряд 1б без слагаемых с цифрой 8; г) $\Sigma 1/n(n+2)$; д) $\Sigma 1/n(n+1)(n+2)$; е) $1-1/2+1/3-1/4+..$; ж) $1-1/2-1/4+1/3-1/6-1/8+1/5-1/10-1/12+..$; з) $1/2+1/3+1/5+1/7+1/11+..$; и) $\Sigma x^n n$; к) $\Sigma x^n/n$; л) $\Sigma n!x^n$; м) $x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+..$; н) $\Sigma \phi_n x^n$, ϕ_n – n-е число Фибоначчи; о) Σx^{n^2}; п) $\Sigma 1/n^x$; р) $\Sigma(\sin nx)/2^n$; с) $\Sigma(\sin nx)/n$; т) $\Sigma(\sin 4^{n^2}x)/3^{n^2}$.
<Указания: используйте признаки сходимости из 3; в 1н вспомните АН3.10в>

2. Найдите сумму ряда а) 1а; б) 1г; в) 1д; г) 1и; д) 1н <отв: $1/(1-x-x^2)$>; е) 1р; ж)* $1-1/3+1/5-1/7+...$ <отв: $\pi/4$, см. АР9>; з)* 1е <отв: $\log_e 2$>; и) 1ж, считая ответ в 2з известным; к)* 1м <отв: $\sin x$>; л)* $1+1/4+1/9+1/16+..$

3. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ. Докажите, что если
а) $0 \le a_n \le b_n$, то Σb_n сходится $\Rightarrow \Sigma a_n$ сходится и Σa_n расходится $\Rightarrow \Sigma b_n$ расходится;
б) (Признак ЛЕЙБНИЦА) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge 0$ и $a_n \to 0$, то $a_1-a_2+a_3-a_4+...$ сходится;
в) (АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ ряды) $\Sigma|a_n|$ сходится, то и Σa_n сходится <Ук: АП6>;
г) (Признак ДАЛАМБЕРА) для некоторого $q<1$ и почти всех n $|a_{n+1}/a_n|<q$, то ряд Σa_n сходится; а если при почти всех n $|a_{n+1}/a_n|>q>1$, то он расходится (так, если $\lim|a_{n+1}/a_n|=q$, то при $q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ расходится) <Ук:1а,3а,3в>;
д) Признак КОШИ получается, если заменить $|a_{n+1}/a_n|$ в признаке Даламбера на $\sqrt[n]{|a_n|}$
е) если $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge 0$, то ряд Σa_n сходится <u>титтк</u> сходится ряд $\Sigma 2^n a_{2^n}$;
ж) (Признак АБЕЛЯ) $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge 0$, $a_n \to 0$ и частичные суммы $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничены, то ряд $\Sigma a_n b_n$ сходится <Указание: докажите, что $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n}(a_k-a_{k+1})s_k + a_{n+1}s_n - a_m s_{m-1}$>.

4. ПОСЛЕ ПЕРЕМЕНЫ МЕСТ СЛАГАЕМЫХ СУММА а) ряда может измениться <Ук:1еж>; б) ряда может оказаться бесконечной; в) ряда Σa_n, где $a_n \ge 0$, не изменится; г) абсолютно сходящегося ряда (см. 3в) не изменится; д) любого неабсолютно сходящегося ряда может стать равной π (или любому заранее заданному числу). е)* (Теорема РИМАНА) Множество сумм рядов, получающихся из сходящегося ряда с комплексными членами перестановками слагаемых,– это либо точка (если ряд абсолютно сходится), либо прямая (если...), либо вся комплексная плоскость.

5. РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ. Докажите, что если $0 \le a_n \le 1$, то ряд Σa_n расходится
а) <u>титтк</u> $\Pi(1+a_n) := \lim(1+a_1)(1+a_2)..(1+a_n) = \infty$; б) <u>титтк</u> $\Pi(1-a_n)=0$.

6. Найдите а) $\Pi(1-1/n^2)$; в) $\Pi(1-2/(n^3+1))$; в) (ВИЕТ) $\Pi(2/\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}})$ n радикалов <отв. $\pi/2$, ук:найдите периметр правильного 2^n-угольника, R=1>; г) $\Pi(1+x^{2^n})$ <отв: $1/(1-x)$>; д) (ЭЙЛЕР) $\Pi(1-p^{-x})^{-1}$, p –n-е простое <отв: Σn^{-x}>; е)* $\Pi\cos(x/2^n)$ <отв: $(\sin x)/x$>; ж)* (ЭЙЛЕР) $\Pi(1-(x/\pi n)^2)$ <отв: $(\sin x)/x$>.
<Указания. К 6гд: $(1-a)^{-1}=1+a+a^2+...$, к 6е: $\lim n\cdot\sin(x/n) = x$ >

7. ПРИЛОЖЕНИЯ. Выведите из а) 2д формулу для ϕ_n; б) 6д,1в и 5б расходимость ряда 1з; в) 2к и 6ж, что сумма ряда 2л равна $\pi^2/6$

1а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п	р	с	т	2а	б	в	г	д	е	ж*	з*	и	к*	л*
Кай			Кай			01/01	14/1	18 мая		29/IV			(7.5)		17/V			16/IV								29/IV		
21/ВЯ			21/ВЯ			Шень	Шень	5 ВЯ		Шень			Лев		АШ			21/ВЯ								Шень		

3а	б	в	г	д*	е	ж	4а	б	в	г	д	е*	5а	б	6а	б	в	г	д	е*	ж*	7а	б	в
21/IV	21/IV	17/V	13/V																					
Шень	Шень	АШ	Лев																					