Кондрашко Володя

М Н О Ж Е С Т В А   Н А   П Р Я М О Й

АН 6
09.02
1989г

ОКРЕСТНОСТЬЮ точки $x\in\mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x.
<u>ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ</u>. Все вводимые здесь понятия имеют смысл не только для прямой, но и для любого множества, в котором определены окрестности.

Точка $x\in\mathbb{R}$ по отношению к подмножеству $M\subset\mathbb{R}$ называется
ВНУТРЕННЕЙ, если она содержится в M вместе с некоторой окрестностью;
ПРЕДЕЛЬНОЙ, если в любой ее окрестности есть точка из M отличная от x;
ГРАНИЧНОЙ, если в любой ее окр-ти есть точка из M и из дополнения $\mathbb{R}-M$;
ИЗОЛИРОВАННОЙ, если $x\in M$ и в некоторой окрестности x нет больше точек M

1. Найдите внутренние, предельные, граничные и изолированные точки множества а) $[0;1]$; б) $\{(-2)^n/(2^n+1) : n\in\mathbb{N}\}$; в) $\mathbb{Q}\cap]0;1[$.

Множество всех внутренних точек множества называется его ВНУТРЕННОСТЬЮ <обозн: IntM>, граничных – ГРАНИЦЕЙ <∂M>, а объединение M и множества его предельных точек называется ЗАМЫКАНИЕМ M <обозн: $\overline{M}$>.

2. Докажите, что а) $\overline{M} = M\cup\partial M$; б) $\mathrm{Int}M = M-\partial M$; в) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;
г) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}M)=\mathrm{Int}M$; д) $\overline{\mathbb{R}-M} = \mathbb{R}-\mathrm{Int}M$; е) $\mathrm{Int}(\mathbb{R}-M)=\mathbb{R}-\overline{M}$.

3. Верно ли, что для любых A и B а) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$; б) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;
в) $\mathrm{Int}(A\cup B)=\mathrm{Int}A\cup\mathrm{Int}B$; г) $\mathrm{Int}(A\cap B)=\mathrm{Int}A\cap\mathrm{Int}B$?

а, г – да
б, в – нет

4. Приведите пример множества M, для которого среди множеств M, $\overline{M}$, $\mathrm{Int}M$, $\mathrm{Int}\overline{M}$, $\overline{\mathrm{Int}M}$, $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}M})$ есть а) четыре; б) пять; в) шесть различных.
г) Какое max число различных множеств можно получить, беря Int и $\overline{M}$?

Множество M называется ОТКРЫТЫМ, если все точки M – внутренние <т.е. M= =IntM>, и ЗАМКНУТЫМ, если оно содержит все свои пред. точки <т.е. $M=\overline{M}$>.

5. Дайте определение (без "не") множества, не являющегося ни открытым, ни замкнутым и приведите пример такого множества.

6. Докажите, что а) IntM открыто; б) $\overline{M}$ замкнуто; в) ∂M замкнуто;
г) M открыто (соотв. замкнуто) $\Leftrightarrow$ дополнение $\mathbb{R}-M$ замкнуто (открыто).

7. Докажите, что
а) объединение любого числа открытых множеств – открыто;
б) пересечение конечного числа открытых множеств – открыто;
в) объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнуто;
г) пересечение любого числа замкнутых множеств – замкнуто;
д) в б и в нельзя отказаться от конечности.

<u>ТОПОЛОГИЯ ПРЯМОЙ.</u>

8. Найдите все подмножества прямой, которые и открыты, и замкнуты.

9. а) Найдите все замкнутые подгруппы $\mathbb{R}$. б) Бывают ли другие?

10. Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением не более, чем счетного числа непересекающихся интервалов, лучей и прямых.

11. КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО. Выкинем из отрезка $[0,1]$ интервал $]1/3,2/3[$ (средняя треть), затем средние трети из оставшихся двух отрезков и т.д.
Докажите, что а) сумма длин выброшенных интервалов равна 1;
б) в КМ (это то, что осталось) кроме концов интервалов есть еще точки; и точек 0 и 1
в) КМ замкнуто, а замыкание его дополнения равно $\mathbb{R}$;
г) КМ имеет мощность континуума <ук: используйте троичную систему>;
д)* любое несчетное замкнутое множество имеет ~~множество~~ мощность континуума.

Множество M называется КОМПАКТНЫМ (или КОМПАКТОМ) если из любого набора открытых множеств, покрывающих M (т.е. их объединение содержит M), можно выбрать конечное ПОДПОКРЫТИЕ (т.е. оставить конечное число этих множеств так, чтобы они по-прежнему покрывали M).

12. Докажите, что а) прямая не компактна; б) интервал – некомпакт;
в) (Лемма ГЕЙНЕ – БОРЕЛЯ) отрезок – компакт;
г) компакт – замкнут и ограничен;
д) замкнутое и ограниченное множество компактно;
е) M компактно $\Leftrightarrow$ любое бесконечное подмн-во имеет в M предельную точку.

13. Функция называется ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ на M, если у любой точки M есть окрестность, в которой эта функция ограничена. Докажите, что
а) функция, локально ограниченная на отрезке, ограничена на нем;
б) для прямой и для интервала это неверно; в) ЛОКАЛЬНО ЗНАКОПОСТОЯННАЯ на отрезке функция (сначала дайте определение) знакопостоянна на нем.

14. Докажите, что а) (Теорема БЭРА) Отрезок нельзя представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств без внутренних точек;
б) а мн-во $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ – в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

1аб в	2аб в г д е	3аб в г	4аб в г	5	6аб в г	7аб в г д
20.5	24.5					
Пес	В. Ко					

8	9аб	10	11аб в г д	12аб в г д е	13аб в	14аб
				4 октября 14.10	18 окт.	
				Акжень Лыб	Пес	