Кондратьев

АН 7
25.01
1989г

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПРЕДЕЛ ПРОИЗВОДНАЯ

Здесь мы рассматриваем только функции на подмножествах $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Непрерывная функция – это такая, которая близкие точки переводит в близкие. Точнее, f называется НЕПРЕРЫВНОЙ в точке $a\in\mathbb{R}$, если она определена в окрестности a и $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x: |x-a|<\delta\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$. (Определение по КОШИ)

1. Дайте определение разрывной в точке a функции, не употребляя "не".

2. Докажите непрерывность а) $1/x$; б) x^n; в) $\sqrt{x}$; г) $\sin x$; д) $\cos x$.

3. (Определение непрерывности по ГЕЙНЕ) а) Если f непрерывна в точке a, то из $\lim\limits_{i\to\infty} x_i=a$ следует $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i)=f(a)$. б) Докажите обратное.

4. Докажите непрерывность в точке a функции а) $f(x)+g(x)$; б) $f(x)g(x)$; в) $f(x)/g(x)$ ($g(a)\neq 0$); г) $h\circ f$, если f, g непрерывны в a, h – в $f(a)$; д) f^{-1}, если f монотонна, а обратная функция f^{-1} определена в окрестности a.

5. Докажите непрерывность $f(x)=$ а) $\Sigma x^n/n!$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n$; в) $\sum\limits_{n>0}\cos nx/n^2$.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. Число A называется пределом $f(x)$ при $x\to a$ ($A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$), если подправленная функция $\tilde{f}(x):=f(x)$ при $x\neq a$, $\tilde{f}(a):=A$ непрерывна в точке a.

6. Определите предел функции а) по Коши и по Гейне (и докажите эквивалентность трех определений); б) при $x\to\pm\infty$; в) слева и справа.

7. Найдите предел функции а) $(x^2-4)/(x^2+x-6)$ при $x\to 1$; б) при $x\to 2$; в) при $x\to\infty$; г) $2\sin 2x$ при $x\to\pi/6$; д) $(\sqrt{x+6}-2)/(x+2)$ при $x\to -2$; е) $(\sqrt[3]{x}-1)/(\sqrt{x}-1)$ при $x\to 1$; ж) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ при $x\to\infty$; з) $\sin x/x$ при $x\to 0$; и) $x/\mathrm{tg}\,x$ при $x\to 0$; к) $\mathrm{tg}\,5x/\sin 3x$, $x\to 0$; л) $(1-\cos x)/x^2$ при $x\to 0$; м) $(\sqrt{3}-2\cos x)/(x-\pi/6)$ при $x\to\pi/6$.

ПРОИЗВОДНАЯ. Функция f называется ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ в точке a, если существует предел $A=\lim\limits_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))/h$. Число A в этом случае называется ПРОИЗВОДНОЙ функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

8. а) Докажите, что (f дифференцируема в a) $\Rightarrow$ (f непрерывна в a). б) А обратно?

9. Найдите производную функции а) x^n; б) $1/x$; в) $\sqrt{x}$; г) $\sin x$; д) $\cos x$.

10. Докажите, что дифференцируемость f в a равносильна существованию числа A и функции $\alpha(h)$, т.ч. $f(a+h)=f(a)+Ah+\alpha(h)$ и $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)/h=0$ при $h\to 0$.

11. Докажите, что если $\exists f'(a)$, $g'(a)$, $h'(b)$, где $b=f(a)$, то а) $(f\pm g)'=f'\pm g'$; б) $(fg)'=f'g+fg'$; в) $(f/g)'=(f'g-fg')/g^2$, если $g(a)\neq 0$; г) $(h\circ f)'(a)=h'(b)f'(a)$; д) $(f^{-1})'(b)=1/f'(a)$, если f^{-1} (обратная к f) определена в окрестности b и $f'(a)\neq 0$.

12. Найдите производную функции а) $\mathrm{tg}\,x$; б) $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$; в) $\sin(\cos x)$; г) $\sqrt[x]{x}$; д) $\arcsin x$; е) $\mathrm{arctg}\,x$; ж) $(\mathrm{arctg}\sqrt{x})/\pi$; и) $f(x):=x^n\sin(x^{-k})$ при $x\neq 0$, $f(0):=0$.

13. Найдите производные функции из задачи а) 5а; б) 5б; в) 5в.

14. Найдите дифференцированием сумму а) $\sum\limits_{n>0} nx^n$; б) $\sum\limits_{n>0} n^2x^n$; в) $\sum\limits_{n>0} n\sin(nx)$.

ПРИВЕДИТЕ ПРИМЕР

15. определенной на $\mathbb{R}$ функции, разрывной а) всюду; б) всюду, кроме нуля; в) в точках 1, 1/2, 1/3, ... ,1/n, ...; г) в точках $\mathbb{Q}$; д) в точках $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

16. определенной на $\mathbb{R}$ функции f т.ч. а) f' существует только в одной точке; б) f' существует всюду, но не всюду дифференцируема; в) f' существует, но не всюду непрерывна; г) f дифференцируема всюду, $f(0)=1$, $f(x)=0$ при $|x|>1$; д)* f непрерывна, но нигде не дифференцируема.

1	2а	б	в	г	д	3аб		4а	б	в	г	д	5аб	в	6аб	в		7аб	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	8аб	
6/V Шень	+ 18.05 Безр	+	+ 24.5 В.В.	+ 18.05 Безр	+	+ 24.5 В.В.	2с Шень	→			→	→			+ Лаг 2.09	+	+	+	+	+ Лаг 2.09	+	+	+	+	+ 18 мая	+ 1.1 2.09	+ 1.1	+	+ 13.09 1.1	+ 2.09 1.1	Шень 6/V

9аб	в	г	д	10	11аб	в	г	д	12аб	в	г	д	е	ж	и	13аб	в	14аб	в	15аб	в	г	д	16аб	в	г	д*
6/V Шень	13/V	18 мая Безр		+	2с Шень	2с	2с	27.11	9.9	22 ноября										13/V	+	+ 6.05.8	+		+ 6.05.8	22.11	9.9