Кондратьев

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

АН 8
03.04
1989г

1. Докажите, что непрерывная во всех точках отрезка $[a,b]$ функция f
а) принимает любое значение между $f(a)$ и $f(b)$ <ук.: АН6.12б +АН6.13б > ;
б) ограничена <ук.: АН6.12б +АН6.13а > ;
в) достигает своих ТВГ и ТНГ <ук.: рассмотрите функцию $1/(ТВГ-f)$ > .

2. (ОБРАЗЫ) а) Пусть функция f непрерывна на всей прямой. Докажите, что для любого отрезка $I\subset\mathbb{R}$ его ОБРАЗ $f(I):=\{f(x) : x\in I\}$ – тоже отрезок.
Верно ли, что для непрерывной функции образ б) интервала – интервал;
в) замкнутого множества – замкнут; г) ограниченного – ограничен;
д) замкнутого и ограниченного – замкнут и ограничен ?

3. (ПРООБРАЗЫ) а) Докажите, что если функция f непрерывна на прямой, то для любого открытого множества M его ПРООБРАЗ $f^{-1}(M):=\{x\in\mathbb{R} : f(x)\in M\}$ открыт;
б) а прообраз любого замкнутого множества – замкнут.
в) (Еще одно ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ) Докажите, что функция непрерывна на $\mathbb{R}$ ~~тогда~~ прообраз любого открытого множества открыт.

4. (КОМПАКТЫ) Докажите, что непрерывная на компакте K функция f
а) переводит его в компакт <ук.: определение компактности + 3в>;
б) ограничена ; в) достигает своих ТВГ и ТНГ;
г) РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНА на K, т.е $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in K\ |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5. Докажите, что а) многочлен нечетной степени имеет корень в $\mathbb{R}$;
б) из любого положительного числа можно извлечь корень n-й степени.

6. Докажите, что если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f
а) имеет обратную функцию, то f – монотонная функция;
б) монотонна, то она имеет обратную, непрерывную на $[f(a),f(b)]$.

7. Пусть f непрерывно отображает отрезок $I=[0,1]$ в себя. Докажите, что у f есть неподвижная точка (т.е. $x\in I$ тч $f(x)=x$).
Это частный случай Теоремы БРАУЭРА, утверждающей, что неподвижная точка существует у любого непрерывного отображения куба в $\mathbb{R}^n$ в себя.

8. Пусть f – непрерывная на отрезке $I=[0,1]$ функция и $f(0)=f(1)$.
а) Докажите, что существуют $x,y\in I$ тч $x-y=1/2$ и $f(x)=f(y)$, т.е. на графике функции f есть горизонтальная хорда длины $1/2$.
б) При каких $d>0$ утверждение 8а останется верным после замены $1/2$ на d?

9. Докажите, что произвольный многоугольник можно разделить
а) прямой на две равновеликие части;
б) двумя перпендикулярными прямыми на четыре равновеликие части.

10. Докажите, что квадратную табуретку с ножками равной длины можно поставить на неплоский пол так, чтобы она не качалась.

11. Из города А в город Б ведут две дороги. Две машины, связанные веревкой длины 20м, выехали из А по разным дорогам и доехали до Б, не разорвав веревки. Докажите, что два круглых воза радиуса 11м, выехав одновременно из А и Б по разным дорогам, не смогут доехать до конца, не столкнувшись.

1а	б	в	2а	б	в	г	д	3а	в	в	4а	б	в	п	5аб		6аб		7	8аб		9аб		10	11
2 сем	29		4/+	9	18,10	4/+	1	8 окт						31.01	26.01	17.10	15.4	15.4	15.4	15.4		15.4	16.12		
Шень		Пас	Шень	Шень	Пас	Шень		Пас						Шень	Шень	Пас	В	В	В	В		В	Анш		