АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Встречаются различные множества, в которых выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, а иногда и деления (часто их называют кольцами). Вот те из них, которые нам сейчас нужны:

$\mathbb{Z}$ – целые числа ;

$\mathbb{R}$ – действительные числа рациональные и иррациональные ;

$\mathbb{Z}[i]$ – гауссовы числа = множество выражений $a + bi$, где a и b целые, а $i^2 = -1$;

$\mathbb{R}[x]$ – многочлены = выражения вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_0, \ldots, a_n$ – действительные числа, сложение производится покоэффициентно, а для умножения нужно в произведении раскрыть скобки и привести подобные члены;

$\mathbb{R}[[x]]$ – степенные ряды = выражения $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, в которых число слагаемых неограничено, коэффициенты действительные числа, а сложение и умножение такие же, как и у многочленов.

Пусть M – одно из перечисленных множеств. Мы будем говорить, что элемент a из M делится на элемент b из M $b \neq 0$, если в M существует элемент c, такой что $a = b \cdot c$. Обозначение: $a \vdots b$.

1. Выполните действия с гауссовыми числами

а) $(3+5i)(5+3i)$; б) $(2+3i)(-3-i) + (-2+2i)(5-3i)$;

в) $(1+i)^4$; г) $(12-5i)/(3+2i)$; д) $(20i)/(1-2i)$;

е) Нарисуйте на координатной плоскости множество всех гауссовых чисел $x+yi$ вида $(2+i)(a+bi)$, где $-2 \leq a, b \leq 4$;

ж) Найдите квадратный корень из $5 + 12i$.

2. Выполните действия с рядами

а) $(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)\cdot(1+x+x^2+x^3+\ldots)$; б) $(1-x^2)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$;

в) $(2+x-x^2)(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots)$; г) $(2+3x-x^3)\cdot(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots)$;

д) $(2+3x+3x^2+3x^3+3x^4+\ldots)\cdot(1-3x/2+3x^2/4-3x^3/8+3x^4/16-\ldots)$;

е) $(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)^2$; ж) $(1+x)/(1-x)$;

з) $(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)/(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)$;

и) $(1+x/1+x^2/1\cdot 2+x^3/1\cdot 2\cdot 3+\ldots+x^n/n!+\ldots)^2$, где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$;

к) $\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2}x^2+\frac{1\cdot 3}{8\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+\ldots-(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots\right)^2$.

л) Найдите квадратный корень из ряда $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$.

3. Делится ли

а) 111...11 (1000 единиц) на 11111; б) а на 111111

в) $x^{1000}+x^{999}+x^{998}+\ldots+x^2+x+1$ на $x^6+x^5+x^4+\ldots+x+1$ (многочлены) ?

г) x^4+x-2 на $x+2$; д) а на $x-1$ (многочлены) ?

е) x^2+x+1 на x^2-x+1 (ряды)? ж) 1 на $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$?

и) $12+3i$ на $2+i$? к) $6+17i$ на $-3+4i$?

4. Докажите, что

а) для любого ряда существует делящийся на него многочлен;

б) для любого гауссового числа существует делящееся на него целое;

в) если $a+bi$ делится на $x+yi$, то $a-bi \,\vdots\, x-yi$.

5. а) Докажите, что элемент a делит любой элемент множества М тогда и только тогда, когда a делит 1. Такие элементы поэтому называются обратимыми (у них есть обратный).

Найдите все обратимые элементы в

б) $\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}[i]$; г) $\mathbb{R}[x]$; д) $\mathbb{R}[[x]]$.

Элемент a множества М, который необратим и не представляется в виде произведения двух необратимых элементов, называется **простым**.

6. Какие из следующих элементов просты, а какие – нет

а) 1987; б) $2x+1$; в) x^2+x-2; г) x^2+x-1;

д) x^3+2; е) x^4+4; ж) $5i$; и) $3+2i$; к) $1987i$;

л) $7+i$; м) $67i$; н) $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$;

о) $x+2x^2+3x^3+\ldots$?

7. Может ли

а) произведение двух целых чисел делиться на 7, если каждое из них на 7 не делится;

б) произведение двух гауссовых чисел делиться на 7, если каждое из них на 7 не делится;

в) а если в б) заменить 7 на 5;

г) простое целое число перестать быть простым в $\mathbb{Z}[i]$;

д) простой многочлен перестать быть простым в $\mathbb{R}[[x]]$;

е) число a не делиться на b в $\mathbb{Z}$, но делиться в $\mathbb{Z}[i]$;

ж) многочлен a не делиться на b в $\mathbb{R}[x]$, но делиться в $\mathbb{R}[[x]]$?