ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ

А. Делимость

Пусть M по-прежнему обозначает одно из колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[[x]]$ и пусть a и b какие-то элементы M. Напомним, что запись $a \vdots b$ означает, что $b \neq 0$ и существует $c \in M$, такой что $a = bc$. В этом случае говорят, что a **делится** на b, или b **делит** a, или a **кратно** b, или b является **делителем** a.

1. Какие из следующих утверждений верны

а) если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$,

б) если $a \not\vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \not\vdots c$,

в) если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $a+c \vdots b$,

г) если $a \vdots b$ и $c \not\vdots b$, то $a+c \not\vdots b$,

д) если $a \not\vdots b$ и $c \not\vdots b$, то $a+c \not\vdots b$,

е) если $ab = cd$ и $a \vdots c$, то $d \vdots b$,

ж) $a \vdots 1$ при всех $a \in M$,

з) $0 \vdots b$ при всех b,

и) если $a \vdots b$ при всех b, то $a = 0$?

2. Что можно сказать про a и b, если а) $a \vdots b$ и $b \vdots a$,

б) множество делителей a совпадает с множеством делителей b,

в) любой элемент кратный a делится на b?

3. В кольце $\mathbb{Z}$ нет **делителей нуля**, т.е. таких ненулевых элементов, произведение которых равно нулю. Докажите, что делителей нуля нет также и в кольцах

а) $\mathbb{Z}[i]$, б) $\mathbb{R}[x]$, в) $\mathbb{R}[[x]]$

4. Выведите из отсутствия делителей нуля в M, что если $a \neq 0$, то

а) из $ab = ac$ следует $b = c$, б) из $ab \vdots ac$ следует $b \vdots c$,

в) уравнение $x^2 = a$ может иметь 0 или 2 решения.

Кондратьев Володя									
1а	б	в	г	д	е	ж	з	и	
1.10.1987 г.						→		22.10	
Ковнинский						→		АВ	
2а	б	в	3а	б	в	4а	б	в	
22.10			1.10.87			8 окт		26.10.	
Вайнтр.			Ковнинский			ТМ		[illegible]	
5а	б	в	г	д	е				
1.10.87				5.10.87					
Ковнинский				Ковнинский					
6а	б	в	г	д	е	ж			
1.10.87						→			
Ковнинский						→			
7а	б	8а	б	9а	б	10а	б	в	г
5.10		5.10.87		8 окт		8 октября			12.
АВ		Ковнин.		ТМ		[illegible]			АВ
10д	е	ж	з	и		11а	б		
8 о	19.10		29.10	29.10		19.10			
ТМ	АВ		[illegible]			Вайнтр.			
12а	б	в	13а	б	в	г	д	14а	б
22.10	26.10.		22.10	~~26~~	26.10.		26.10.		16.1
АВ	Лаур.		АВ		Лаурие				Аш
15	16а	б	17а	б	в	г			
26.10	22.10		22.10						
Лаур.	АВ		Вайнтрауб						
18а	б	19а	б	в	20а	б	21а	б	в
22.10					22.10				26.
Вайнтр.					Вайнтрауб				Ла
22а	б	в	г	д	23а	б	в	г	
22.10			16.11		26.10.		26.10.		
Вайнтр.			Ашень		Лаур.		Лаур.		
24а	б	25а	б	в	26а	б	в		
22.10									
Вайнтр.									

зачтен 16/XI-87 Шень

Пусть $a, b, m \in M$. Если $a-b \vdots m$, то говорят, что a <u>сравнимо</u> с b <u>по модулю</u> m и пишут $a \equiv b \pmod m$

5. Докажите следующие свойства сравнений

а) если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$ то $a+c \equiv b+d \pmod m$,

б) если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$ то $ac \equiv bd \pmod m$,

в) если $a \equiv b \pmod m$, то $ac \equiv bc \pmod{mc}$,

г) $a^2 \equiv b^2 \pmod{a+b}$, д) $a^n \equiv b^n \pmod{a-b}$, е) $a^{1987} \equiv -b^{1987} \pmod{a+b}$.

6. Какие из следующих утверждений верны (всюду кроме последнего пункта опущено $\mathrm{mod}\ m$):

а) если $a \equiv b$ и $c \not\equiv d$, то $a+c \not\equiv b+d$,

б) если $a \not\equiv b$ и $c \not\equiv d$, то $a+c \not\equiv b+d$,

в) если $a \equiv b$ и $c \not\equiv d$, то $ac \not\equiv bd$,

г) если $a \equiv -b$ то $a^2 \equiv b^2$, д) если $a^2 \equiv b^2$, то $a \equiv b$ или $a \equiv -b$,

е) если $ac \equiv bc$ то $a \equiv b$, ж) если $ac \equiv bc \pmod{mc}$ то $a \equiv b \pmod m$

<u>Б. Целые числа</u>

7. Изобразите на числовой прямой целые числа a, для которых а) $a \equiv -1 \pmod 7$, б) $a \equiv 15 \pmod 5$.

8. а) Докажите, что из любых 10 целых чисел можно выбрать два, которые сравнимы по модулю 6.

б) При каком наименьшем n из любых n чисел можно выбрать 10 чисел, таких что любые два из них сравнимы mod 6 ?

9. Напомним, что <u>разделить</u> целое число a на b с <u>остатком</u> означает найти такие целые k (<u>неполное частное</u>) и r (<u>остаток</u>), что $a = k \cdot b + r$ и $0 \le r < |b|$. Это можно сделать, например, так. Отметим на прямой все числа кратные b. Они разбивают прямую на отрезки длины $|b|$. Пусть $k \cdot b$ – левый конец отрезка, содержащего точку a, тогда разность $r = a - kb$ лежит между 0 и $|b|$, и мы получаем требуемое представление $a = kb + r$.

а) Восполните пробелы в приведенном доказательстве.

б) Докажите, что частное и остаток определены однозначно.

10. Найдите остатки от деления а) -200 на 23, б) 7^{1987} на 8, в) 7^{1987} на 25, г) 7^{1987} на 100, д) $11^{100} - 8^{100}$ на 57, е) $n^7 - n$ на 7, ж) $2^n + 1$ на $2^k + 1$, з) $n^2 + 3n - 7$ на $n+2$, и) $33..3$ (n троек) на $33..3$ (k троек).

11. Существует ли целое число, дающее

а) при делении на 12 остаток 6, а при делении на 20 остаток 8,

б) при делении на 8 остаток 7, а при делении на 25 остаток 18 ?

12. а) Докажите, что натуральное число n и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.

б) Как найти остаток от деления натурального числа на 11, если известна его десятичная запись?

в) Выведите признаки делимости на 3, 9, 11.

13. а) Какие остатки могут давать точные квадраты $\bmod 8$?
б) Докажите, что $\sqrt{8}$ (а значит и $\sqrt{2}$) иррациональное число, то есть не существует таких целых a и b, что $a^2/b^2=8$.

Разрешимы ли в целых числах уравнения
в) $x^2+y^2=1986$, г) $x^2+y^2=1987$, д) $x^2+y^2+z^2=999$?

14. а) Дано 101 число от 1 до 200. Докажите, что из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое.
б) Будет ли это верно, если 101 заменить на 100?

В. Многочлены

Пусть $P=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ многочлен, s – число, значением многочлена P в s называется число $P(s)=$ $=a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots$. Число s называется корнем многочлена P, если его значение P в s равно нулю.

15. Найдите сумму коэффициентов многочлена $(1-x+x^5)^{1987}$.

16. а) Докажите, что если многочлен P делится на многочлен Q, то все корни Q являются корнями P.
б) Верно ли обратное утверждение?

17. Делится ли а) x^3-3x^2+4 на $2x-4$, б) а на $x+2$,
в) $x^{1987}+x-2$ на x^2-1; г) $x^{57}-1987x^2+100$ на $3x-1$?

Степенью ненулевого многочлена $P=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ называется максимальное n, при котором $a_n\neq 0$. Обозначение: $n=\deg P$.

18. а) Докажите, что $\deg(P\cdot Q)=\deg P+\deg Q$,
б) Как связана $\deg(P+Q)$ с $\deg P$ и $\deg Q$,

19. а) Пусть $P_1=x^3$, $P_2=x^4+1$, $P_3=x^5+x+1$. Найдите три числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не равных нулю одновременно, таких что $\alpha_1 P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3 \vdots x^2+1$.
б) Докажите, что такие три числа можно найти для любых P_1, P_2, P_3
в*) Пусть Q - ненулевой многочлен, $\deg Q=n$, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ – произвольные многочлены. Докажите, что при $k>n$ всегда найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, такие что $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\ldots+\alpha_kP_k \vdots Q$, а при $k\leq n$ не всегда.

Пусть P и Q многочлены, $Q \neq 0$. <u>Разделить</u> P на Q с <u>остатком</u> означает найти такие многочлены T (неполное частное) и R (остаток), что $P = T \cdot Q + R$ и либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg Q$.

20. а) Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно. (Указание: вспомните (или придумайте), как делить многочлены уголком).

б) Докажите, что частное и остаток определены однозначно.

21. Найдите остаток от деления а) $x^6 - 57x + 25$ на $x - 2$; б) $x^6 - 3x^2 + 2$ на $2x^2 + x + 1$, в) $x^n + 1$ на $x^k + 1$.

22. Теорема Безу и ее следствия.

а) (Теорема Безу) Остаток от деления P на $x - a$ равен $P(a)$.

б) Пусть a - корень многочлена P. Тогда $P \vdots x - a$.

в) Значения многочлена P в 1 и 2 равны нулю. Тогда $P \vdots (x-1)(x-2)$.

г) Число различных корней многочлена P не больше $\deg P$.

д) Пусть при любом натуральном n значения многочленов $P(n)$ и $Q(n)$ совпадают. Тогда $P = Q$.

23. а) Известно, что $P \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ x-1)$ и $P \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\ x+1)$. Какой остаток дает многочлен P при делении на $x^2 - 1$?

б) При каком b многочлен $x^{1987} + bx^5 - 3$ делится на $3x + 3$?

в) При каких a, b $x^5 + ax^3 + bx - 2$ делится на $2x^2 - x - 1$?

г) При каких a, b $x^5 + ax^3 + bx - 2 \equiv 2x - 1 \ (\mathrm{mod}\ 2x^2 - x - 1)$?

24. Пусть коэффициенты многочлена P целые числа. Докажите,

а) что, если $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ m)$, то и $P(a) \equiv P(b) \ (\mathrm{mod}\ m)$,

б) что $P(a) \equiv P(b) \ (\mathrm{mod}\ a-b)$.

25. а) Значения многочлена $x^2 - x + 41 = P$ в первых пяти натуральных числах являются простыми целыми числами. Верно ли что при всех натуральных n число $P(n)$ простое ?

б) Существует ли многочлен P с целыми коэффициентами, такой что при всех натуральных n (целое) число $P(n)$ простое ?

в)* Изменится ли что-нибудь, если не требовать, чтобы коэффициенты многочлена были целыми ?

26. Пусть P и Q два многочлена с целыми коэффициентами.

а) Пусть $P \vdots Q$. Верно ли, что при всех $n \in \mathbb{N}$ $P(n) \vdots Q(n)$?

б)* Верно ли обратное утверждение ?

в)* Что изменится, если не требовать целочисленности коэффициентов