ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ В $\mathbb{Z}[i]$

АР 3
I2.I0
I987

Жу. Кондрапева

Iа	б	в	г	2а	б	в	г	д	е
29.10	29.10	29.10	29.10	~~29.11~~			4 апреля		
А. Шень →				Злозина			Т. Шень		
3а	б	в	г	4а	б	в	г	1а	
4.1	4.1	–	4.1	4 апреля				29.10	–
ТМ				Т. Шень					
5а	б	в	6а	б	в	г	д	е	ж
7.4		–	4.1	4.7		7.4	7.4	11.5	
В			ТМ	АВ		АВ	АВ		
7а	б	в	8а	б	в	г	9а	б	
11 апреля			← 18.04 →				21.4.		
А. Шень			Лаур				[illegible]		

Пусть $\alpha = a + bi$. Число $\bar{\alpha} = a - ib$ называется СОПРЯЖЕННЫМ к α, а число $N(\alpha)=a^2 + b^2$ НОРМОЙ α. Норма гауссова числа - целое неотрицательное число, поэтому в арифметическом отношении она удобнее, чем модуль - корень из $N(\alpha)$.

I. (Замечательные свойства) Докажите, что
а) $N(\alpha) = \alpha\cdot\bar{\alpha}$; б) $\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$; в) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$;
г) $N(\alpha\beta)=N(\alpha)\cdot N(\beta)$; д) обратимость гауссова числа равносильна обратимости его нормы.
(Проверьте, что из свойств а,г,д немедленно получаются задачи АРI.4а, АР2.3а, АРI.5в соответственно.)

2. (Делимость и норма) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, $\beta \neq 0$.
а) Проверьте, что из $\alpha \vdots \beta$ следует $N(\alpha) \vdots N(\beta)$.
б) Верно ли обратное? в) Пусть $N(\alpha)$ простое целое число. Докажите, что тогда и α простое. г) А обратно?
д) Докажите, что $\alpha \vdots \beta \iff \alpha\bar{\beta} \vdots N(\beta)$.
е) Выведите признак делимости на $1+i$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$.

3. (Суммы квадратов) а) Покажите, используя Iг, что произведение двух целых чисел, представимых в виде x^2+y^2 с целыми x и y, тоже представимо в таком виде.
Верно ли это для сумм б) трех; в) четырех квадратов?
г) Докажите, что произведение целых чисел вида $x^2 + 2y^2$ тоже представимо в таком виде. Как объяснить это в духе задачи Iг?

4. (Точки в круге) а) Отметьте на плоскости все гауссовы числа с $N \leq 20$.
б) Сколько существует гауссовых чисел с нормой, не превосходящей 50?
в) Оцените количество гауссовых чисел с нормой, меньшей миллиона, ошибившись не более, чем в два раза; г) не более, чем на 5%.

5. (Кролики в клетках) а) Докажите, что из любых 40 гауссовых чисел можно выбрать два, разность которых кратна 6;
б) а из любых 80 четыре, любые два из которых сравнимы mod $3-4i$.
в) При каком наименьшем n из любых n гауссовых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на $7+i$?

6. (Квадратные решетки) Изобразите на плоскости множества гауссовых чисел α, таких что а) $\alpha \equiv 2-i \bmod 5$; б) $\alpha \equiv 5 \bmod 2-i$; в) $\alpha \equiv 2+i \bmod 3-4i$.
г) Докажите, что при фиксированных β и $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ числа $\alpha \equiv \gamma \bmod \beta$ лежат в вершинах сетки из одинаковых квадратиков д) площади равной $N(\beta)$.
е) Возьмем один из квадратиков и покрасим одну его вершину, две выходящие из нее стороны (не трогая других вершин) и его внутренность. Докажите, что любое гауссово число сравнимо mod β ровно с одним из окрашенных гауссовых чисел.
ж) Докажите, что максимальное число попарно несравнимых mod β гауссовых чисел равно $N(\beta)$ (сосчитайте покрашенные точки).

7. (Деление с остатком) а) Докажите, что для любых гауссовых α и $\beta \neq 0$ найдутся γ и $\delta \in \mathbb{Z}[i]$, такие что $\alpha = \beta\cdot\gamma+\delta$ и $N(\delta) < N(\beta)$.
Найдите γ и δ (все решения), если б) $\alpha = 40-40i$, $\beta = 6$; в) $\alpha = 13i$, $\beta = 4+3i$.

8. Существует ли $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, такое что а) $\alpha \equiv i \bmod 6$, $\alpha \equiv 1 \bmod 2+i$;
б) $\alpha \equiv 8 \bmod 13$, $\alpha \equiv i \bmod 2+3i$; в) $\alpha^2 \equiv i \bmod 3+2i$; г) $\alpha^2 \equiv i \bmod 3+4i$?

9. Докажите, что при всех $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ а) $\alpha^5 - \alpha \vdots 2+i$; б) $\alpha^9 - \alpha \vdots 3$.