[illegible]

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

АР 4
26.10
1987г

Пусть a и b – целые числа, не равные нулю одновременно. Наибольшее число, делящее как a так и b, называется их НАИБОЛЬШИМ ОБЩИМ ДЕЛИТЕЛЕМ и обозначается НОД(a,b). Числа a и b называются ВЗАИМНО ПРОСТЫМИ, если НОД(a,b)=1 , т.е. у них нет общих делителей кроме ±1.

1. Найдите НОД следующих чисел (m и n – натуральные): а) n и n+1 ; б) n и n+6 ; в) n+2 и 3n+5 ; г) 2n+3 и 7n+6 ; д) 2n+1 и n^2 ; е) 2^n-1 и 2^m-1 ; ж) $2^{2^n}+1$ и $2^{2^m}+1$.

2. Докажите, что а) если НОД(a,b)=d, то a/d и b/d взаимно просты ; б) НОД(a,ab)=a (a>0) ; в) НОД(b,a–b)=НОД(a,b); г) НОД(b,a–kb)=НОД(a,b); д) НОД(13a+10b,9a+7b)=НОД(a,b). е) Найдите НОД(4731,2109). ж)* НОД(ka+lb,ma+nb)=НОД(a,b) , если kn–lm = 1.

Подмножество I кольца M называется ИДЕАЛОМ , если выполнены два условия: (И1) $a,b\in I \Rightarrow a+b\in I$ и (И2) $a\in I$ и ~~$n\in\mathbb{Z}$~~ $n\in M$ $\Rightarrow na\in I$.

3. Какие из следующих множеств являются идеалами а) {0} б) $\mathbb{Z}$ в) $\mathbb{N}$ г) $k\mathbb{Z} := \{x \mid x \,\vdots\, k\}$ д) $\{x \mid x \,\vdots\, 3$ или $x \,\vdots\, 5\}$ е) $\{ax+by \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ ж) $\{x \mid xb \,\vdots\, c\}$?

4(Теорема о ГЛАВНЫХ ИДЕАЛАХ). Докажите, что любой идеал кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид задачи 3г, т.е. совпадает с множеством кратных некоторого числа k (это число называется ОБРАЗУЮЩЕЙ идеала) /Указание: рассмотрите наименьший положительный элемент идеала/.

5(НОД и идеалы). Докажите, что а) образующая идеала 3е = НОД(a,b); б) НОД(a,b) делится на любой общий делитель чисел a и b ; в) если a и b взаимно просты, то найдутся x,y , такие что ax+by=1; г)* любое число представляется в виде ax+by+cz , если a,b,c не имеют общего делителя отличного от ±1.

6(Теоретические следствия). Пусть b и c взаимно просты, p – простое. Тогда а) $ab \,\vdots\, c \Rightarrow a \,\vdots\, c$; б) $ab \,\vdots\, p \Rightarrow a$ или b кратно p; в) $a \,\vdots\, b$ и $a \,\vdots\, c \Rightarrow a \,\vdots\, bc$.

Теперь уже ничего не стоит доказать основную теорему арифметики, но мы с этим немного повременим.

7. Докажите, что а) НОД(ka,kb)=k·НОД(a,b) ; б) НОД(a,b)·НОК(a,b)=|ab| где НОК(a,b) – наименьшее общее (положительное) кратное чисел a и b.

8(Линейные ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ). Рассмотрим уравнение ax+by=c Докажите что а) оно имеет решение в целых числах титтк $c \,\vdots\, d$=НОД(a,b); б) если x_0,y_0 одно из его решений, то все решения даются формулами
$x = x_0 + tb/d$, $y = y_0 - ta/d$, $t\in\mathbb{Z}$.
Найдите все решения уравнений в) 29x–13y=1 ; г) 29x–13y=2 .

9. Слонопотам за один ход на бесконечной шахматной доске перемещается на m клеток в одном направлении и на n в перпендикулярном. (Конь – это слонопотам с m=2,n=1.) При каких m,n слонопотам может попасть на соеднее с ним поле?

10(КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ). Пусть натуральные числа $m_1,\dots,m_k$ попарно взаимно просты, а $r_1,r_2,\dots,r_k$ произвольные целые. Докажите, что а) $\exists n\in\mathbb{N}\ \forall i\quad n\equiv r_i \pmod{m_i}$; б) такое n от 1 до $m_1m_2\dots m_k$ ровно одно.

1а	б	в	г	д	е	ж	2а	б	в	г	д	е	ж*	3а	б	в	г	д	е	ж	4	5а	б	в	г*	6а	б	в	7а	б	8а	б	в	г	9	10а	б
12 нояб			26н	29н		10/9	12 ноября						16/10	12 ноября							19.11	26 нояб				29н			26н	3.д.	26н		29н				
												→								→	с.з.	АИИ		→													