Кондратьев В.

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

АР 5
30.11
1987г

Этот алгоритм (АЕ) состоит из последовательности шагов. За один шаг он по паре целых чисел (a,b) строит новую пару (b,r), где r – остаток от деления a на b, если же $b = 0$, то алгоритм останавливается.

1. Докажите, что а) $НОД(a,b) = НОД(b,r)$;
б) начав с пары (a,b), алгоритм Евклида в конце концов остановится;
в) если $(d,0)$ – пара полученная на последнем шаге, то $d = НОД(a,b)$;
г) (не пользуясь АР4.5) $НОД(a,b)$ представим в виде $ax+by$ с $x,y \in \mathbb{Z}$

Алгоритм Евклида позволяет не только вновь доказать теорему АР 4.5в, но и дает удобный способ нахождения желанных x и y.

2. Найдите а) $НОД(7581,1767)$; б) все решения уравнения $1987x-555y=1$ в целых числах; в) уравнения $7581x-1761y=15$ в натуральных числах.

3. (Числа ФИБОНАЧЧИ). Это последовательность $\phi_1=1, \phi_2=2, \phi_3=3, \phi_4=5, \dots, \phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n$. Докажите, что а) $НОД(\phi_n, \phi_{n+1})=1$; б) $\phi_{n+1}\phi_{n-1}-\phi_n^2=(-1)^{n+1}$;
в) $(3/2)^{n-1} \leqslant \phi_n \leqslant 2^{n-1}$. Найдите г)* $\min c \in \mathbb{R}$ - тч $\forall n \ \ \phi_n < c^n$;
д)* формулу, выражающую ϕ_n через n.
е) Если АЕ, начав с пары(a,b) остановился через n шагов, то $b \geqslant \phi_n$.

4 (ЦЕПНЫЕ ДРОБИ). Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частные, которые получались при делении с остатком на первом, втором, ..., последнем шаге АЕ, примененного к паре (a,b). а) Докажите, что $a/b = n_1+1/(n_2+1/(n_3+..(n_{k-1}+1/n_k)..))$.
б)* Отбросим в этой цепной дроби последнее слагаемое $1/n$ и приведем ее к несократимому виду y/x. Докажите, что $ax-by = \pm НОД(a,b)$.
в) Пусть все коэффициенты n_i цепной дроби равны 1. Тогда $a/b= \phi_k/\phi_{k-1}$

5. (СОИЗМЕРИМОСТЬ и НЕСОИЗМЕРИМОСТЬ). Два отрезка прямой называются СОИЗМЕРИМЫМИ, если существует третий отрезок (общая мера), который в каждом из них укладывается целое число раз. Докажите, что отрезки a и b соизмеримы титтк а) отношение a/b рационально; б) алгоритм Евклида для пары (a,b) остановится (поймите сначала, как он работает). В этом случае последний ненулевой остаток – наибольшая общая мера.

6. Докажите с помощью АЕ для отрезков, что $\sqrt{2}$ иррационален.

7. (БЕСКОНЕЧНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ). а) На каждом шаге АЕ, примененного к паре отрезков (a,b), получилось частное 1. Найдите отношение a/b.
"Разложите" в цепную дробь б) $\sqrt{2}$ в) $1+\sqrt{6}$ г) $(3+\sqrt{13})/2$. Докажите, что
д)* если частные n, начиная с некоторого места периодичны (т.е. $\exists k$ и N тч $n_{i+k}=n_i$ при $i>N$), то a/b – КВАДРАТИЧНАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОГСТЬ, т.е. имеет вид $x+y\sqrt{d}$, где $x,y \in \mathbb{Q}, d \in \mathbb{N}$, d не является точным квадратом.
е)** цепная дробь для квадратичной иррациональности периодична.

8.* а) К паре отрезков длины менее 1км 40 раз применили АЕ. Докажите, что остаток не превосходит 1мм.
б) Докажите, что можно найти целые m и n тч $|m+n\sqrt{2}| < 0{,}0000000001$.
в) На ободе длиной $\sqrt{2}$ м имеется поперечная щель шириной 1мм. Блоха совершает прыжки по 1м. Докажите, что она когда-либо провалится.
г) В каждой точке плоскости, обе координаты которой выражаются целым числом километров вбит кол диаметром 1см. Докажите, что выстрелив из начала координат в любом направлении, мы в один из них попадем.
д) Оцените максимальную длину полета пули.

1а	б	в	г	2а	б	в	3а	б	в	г*	д*	е	4а	б*	в	5а	б	6	7а	б	в	г	д*	е*	8а	б*	в*	г*	д*
3	декаб		7е	3.12	7 дек		3.12	7.	12			18я	24		18я	7д	24	18	Ян	14	лив				2ля				
	Буков		—Ян		ТИ	И	Ян		ТИ			ЯН	3		ЯН	ТН	3	Яков		Вай					ДИ				