Экз. Кондратьева Ю.

# ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

АР 6
26.11
1987г

Это теорема об однозначности разложения на простые множители. Для $\mathbb{Z}$ она следует из результатов листка АР4 (или АР5, если угодно).

1. а) Докажите, что любое натуральное $n$ представимо в виде произведения простых $n = p_1 p_2 \ldots p_k$. б) Если $n = q_1 q_2 \ldots q_m$ – другое такое представление, то $k=m$ и набор $q_j$ – это $p_i$, только в другом порядке.

К другим кольцам мы обратимся позднее, а пока извлечем следствия в $\mathbb{Z}$.

2. Докажите, что произведение различных простых – не точный квадрат.

3. Пусть $x^n = y^m$, где НОД$(m,n)=1$. Докажите, что $\exists t$ $x = t^m$, $y = t^n$.

4. а) Докажите, что простое число $p$ входит в разложение числа $n!$ $[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+\ldots+[n/p^k]+\ldots$ раз ($[a]$ –целая часть числа $a$).
   б) Найдите число нулей на конце числа 1987!.
   в) Докажите, что $n!$ не делится на $2^n$.
   г) Докажите, что произведение $n$ последовательных чисел кратно $n!$.

5. Может ли сумма $1/2 + 1/3 + 1/4 +\ldots+ 1/n$ быть целым числом?

6. (ПРОСТЫЕ ЧИСЛА) Докажите бесконечность множества простых чисел
   а) всех; б) вида $4k+3$; в) вида $6k+5$; г)* вида $4k+1$
   <Указания: а) если не так, рассмотрите произведение всех простых +1
   б) у числа $4N+3$ есть хоть один простой делитель такого вида >

Эти утверждения–частные случаи замечательной (и нетривиальной) теоремы ДИРИХЛЕ о бесконечности множества простых вида $ak+b$ при НОД$(a,b) = 1$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $d(n)$ число всех делителей $n$, через $s(n)$ – их сумму, через $\varphi(n)$–количество чисел от 1 до $n$, взаимно простых с $n$. Функция $f$ натурального аргумента $n$ называется МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ, если для взаимно простых $m,n \in \mathbb{N}$ $f(mn) = f(m)f(n)$.

7. Докажите мультипликативность функции а) $\varphi(n)$; б) $d(n)$; в) $s(n)$.

8. Найдите а) $\varphi(5^n)$; б) $\varphi(3^n 5^m)$; в) $\varphi(n)$; г) $d(10^n)$; д) $d(n)$; е) $s(3^n)$; ж) $s(10^n)$; з) $s(n)$; где $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, а $p_i$ различные простые.

Число $n$ называется СОВЕРШЕННЫМ, если $s(n)=2n$, т.е. $n$ совпадает с суммой своих делителей, отличных от $n$. Например: $6=1+2+3$; $28=1+2+4+7+14$.

9. Докажите, что а) если $q = 2^p-1$ простое, то $q(q+1)/2$ совершенно; б) любое четное совершенное число имеет такой вид, причем $p$ простое; в)*** нечетных совершенных чисел не существует.

Выражения вида $\sum k_n/n^x = k_1+k_2/2^x+\ldots+k_n/n^x+\ldots$ называются (формальными) РЯДАМИ ДИРИХЛЕ. Ряды Дирихле можно складывать (покоэффициентно) и перемножать (раскрывая скобки по формуле $m^x n^x = (mn)^x$ и приводя подобные члены). Их использовал Дирихле для доказательства теоремы о простых в арифметической прогрессии (см. зад. 6). Первый из них – ДЗЕТА ФУНКЦИЯ РИМАНА – $\zeta(x)=1+1/2^x+1/3^x+\ldots$ Эта функция (ее вместе с тождеством 11а придумал ЭЙЛЕР) – чрезвычайно важная персона в арифметике.

10. Вычислите первые 10 коэффициентов рядов а) $\zeta(x)^2$; б) $\zeta(x)\cdot\zeta(x-1)$; в) $L(x)\cdot\zeta(x)$, где $L(x)=1-1/3^x+1/5^x-1/7^x+\ldots$. Докажите, что г) $\zeta(x)^2 = \sum d(n)/n^x$; д) $\zeta(x)\cdot\zeta(x-1) = \sum s(n)/n^x$; е)* $4\cdot L(x)\cdot\zeta(x) = \sum N(n)/n^x$, где $N(n)$ – число целых точек на окружности радиуса $\sqrt{n}$.
    ж) Выведите из 10е формулу для вычисления $N(n)$.

11. (ЭЙЛЕРОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ) а) Докажите, что $\zeta(x)=\prod_p(1+1/p^x+1/p^{2x}+1/p^{3x}+\ldots) =1/\prod_p(1-p^{-x})$, где $\prod_p$ означает, что берется произведение по всем простым числам. Эта формула равносильна основной теореме арифметики. Аналогичное разложение можно написать для любого ряда Дирихле, коэффициентами которого является мультипликативная функция. Например, для $d(n)$ и $s(n)$ (10гд) или б) $L(x)=1/(\prod_{p\equiv 1 \bmod 4}(1-1/p^x)\prod_{p\equiv 3 \bmod 4}(1+1/p^x))$.

Зачет по АР6 11 апр. Шень

| 1аб | 2 | 3 | 4а | б | в | г | 5 | 6а | б | в | г* | 7а | б | в | 8абвгдежз | 9а | бв | 10абвгде* | 11аб |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14.. | 28.9 | Ж.. | 18 января |  |  |  | 29.. | Ж.. | 4 фев |  |  | 18.2.88 |  |  | 22 февраля → | 13.2 | 14.. | 14.01 / 25.. |  |