Экземпляр Кондратьева Владимира 8 «В»

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

АР 8
28.01
1988г

Так называются уравнения в целых числах в честь греческого математика ДИОФАНТА. Есть много методов их решения (хотя как правило – никакого). Если в задаче ничего не сказано особо, то надо решить уравнение в $\mathbb{Z}$.

1. (РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ) а) $x^2=y^2+2y+13$ б) $x^2-3xy+2y^2=3$
в)* $y^2=x^3\pm1$ г)* $y^2=x^3-4$ д) $x^y=y^x$ в $\mathbb{N}$ е) то же в $\mathbb{Q}$.

2. (РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ) Пусть $N(n)$–число решений в $\mathbb{Z}$ уравнения $x^2-y^2=n$.
а) Найдите n т.ч. $N(n)=0$. Докажите, что б) $N(n)=2(d_+(n)-d_-(n))$, где $d_-(n)$
число делителей n вида $4k+2$, а $d_+(n)$ – всех остальных делителей n;
в) $\frac{1}{2}N(n)$–мультипликативно; г) если $N(n)=4$ и n нечетно, то n –простое.
д) Придумайте аналоги утверждений а)–г) для уравнения $x^2+y^2=n$.

3. (ПИФАГОРОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ) Это прямоугольные тр-ки с целыми сторонами
а) Найдите 5 попарно не подобных пифагоровых треугольников.
б) Докажите, что все они имеют вид $c(a^2-b^2), 2abc, (a^2+b^2)c$ для $c, a, b \in \mathbb{N}$.
в) Докажите, что произведение сторон пифагорова тр-ка делится на 60.

4. (РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЧКИ) Описание пифагоровых тр-ков равносильно отыска-
нию всех рациональных точек (обе координаты $\mathbb{Q}$) на окружности $x^2+y^2=1$
(почему?), которые можно найти, соединяя точку $(0,1)$ с точками оси $0x$.
а) Пусть $C=\{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\}$–кривая второго порядка, не являю-
щаяся объединением двух прямых, а $M=(p,q)$ – рациональная точка на C.
Докажите, что если $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$, то прямые, соединяющие M с раци-
ональными точками оси $0x$, пересекают C в рациональных точках и все
рациональные точки на C (кроме, быть может, одной) так получаются.
б) Решите уравнение $x^2-5y^2=4$ в $\mathbb{Q}$. в) Решите уравнение $x^2+2y^2=z^2$.
г) Найдите все арифметические прогрессии из трех точных квадратов.
д) Найдите 8 рац. точек на кубической кривой $y^2=x^3-4$ <Указание: ищи-
те целые точки и проводите прямые через пары рациональных точек.>

5. (ОСТАТКИ) а) $5^x-1=y^2$; ($3^x-5=y^2$) б) $y^2=5x^2+6$; в) $x^4+y^4+z^4+t^4=1989$; г) $x^2+y^2=3$ в $\mathbb{Q}$;
д)* $y^2=x^3+7$; е) $3^x-2^y=1$. ж) Найдите все $n \in \mathbb{N}$ т.ч. числа $1/n$ и $1/(n+1)$
разлагаются в конечную десятичную дробь.

6. (ОЦЕНКИ) а) $xyz=x+y+z$; б) $1/x+1/y+1/z=1$; в)* $xy+1 \vdots z$, $yz+1 \vdots x$, $zx+1 \vdots y$.

7. (МЕТОД БЕСКОНЕЧНОГО СПУСКА) Его применял ФЕРМА, доказывая, что урав-
нение не имеет ненулевых решений – предполагаем, что есть, и получа-
ем из него новое "меньшее" решение. Сделайте это для а) $7x^2+5y^2=z^2$;
б) $x^2+y^2+z^2=2xyz$; в) $x^3+2y^3=4z^3$; г)* $x^2+y^2=z^2$, $x^2-y^2=t^2$; д)* $x^4+y^4=z^2$.
< Указание: в г и д не забудьте про 3в> е)** $x^3+y^3=z^3$;
ж)* Докажите, что площадь пифагорового треугольника – не квадрат.

8. (ЦЕПОЧКИ МАРКОВА) а) Найдите 4 решения в $\mathbb{N}$ уравнения $x^2+y^2+z^2=3xyz$.
б) Придумайте, как по одному его решению построить три новых.
<Указание: в каждой новой тройке два числа такие же как и в старой>
в) Нарисуйте "дерево" потомков тройки $(1,1,1)$ до 6 колена.
г) Докажите, что в этом дереве встретятся по одному разу все решения.
д)* При каких a уравнение $x^2+y^2+z^2=axyz$ имеет ненулевые решения?
е) Найдите все тройки натуральных чисел меньших 1000, сумма квадра-
тов которых кратна их произведению.

1 а б в* г д е	2 а б в г д	3 а б в	4 а б в г д	5 а б в г д е ж	6 а б в*	7 а б в г д е ж	8 а б в г д е
7м 17Н	2/13	Е/Ш		17м 4/4	2/3 17м		17м
7 АШ	[illegible]	[illegible]		7 7м	[illegible] 7		7н