~~[illegible]~~ [illegible] Жолди

# РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

АР 9
04.04.
1988г

СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 57
района г. Москвы
УЧЕБНАЯ ЧАСТЬ

Классические уравнения $x^2+y^2=n$ и $x^3+y^3=z^3$ из АР8 можно решить с помощью основной теоремы арифметики (ОТА) но не в $\mathbb{Z}$, а в других кольцах. Чтобы сохранить ее формулировку из АР6, мы будем считать ОДИНАКОВЫМИ два разложения элемента $a$ кольца $A$ на простые множители, отличающиеся только порядком и умножением на обратимые элементы из $A$ <примеры: $2\cdot3$ и $-3\cdot-2$; $(2+i)(2-3i)$ и $(3+2i)(1-2i)$ >. Обозначим: $\Gamma$-кольцо $\mathbb{Z}[i]$ (ГАУСС), $Э:=\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]=\{x+y\sqrt{-3}: x,y\in\mathbb{Z}\}$ (ЭЙЛЕР) и $K:=\mathbb{Z}[\omega]=\{x+y\omega: x,y\in\mathbb{Z}, \omega=(-1+\sqrt{-3})/2\}$ (КУММЕР, хотя ЭЙЗЕНШТЕЙН был раньше). <Совет: делайте сначала все про $\Gamma$>

1. Докажите: а) $Э$ и $K$ кольца, $Э\subset K$; б) $\alpha\in K \Rightarrow \alpha, \omega\alpha$ или $\omega^2\alpha\in Э$; в) в $Э$ и $K$ есть сопряжение и норма со свойствами АР3.1 и 2абв; г) $\{x^2+3y^2: x,y\in\mathbb{Z}\}\subset\{x^2-xy+y^2: x,y\in\mathbb{Z}\}$; д) и произведение двух таких чисел имеет тот же вид.

2. Найдите а) обратимые элементы в $Э$ и $K$ и все различные разложения 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17 на простые множители в б) $\Gamma$; в) $Э$; г) $K$.

3. (ЕВКЛИДОВЫ КОЛЬЦА) Пусть кольцо $A$ не имеет делителей нуля и в нем определено ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ, т.е. для $a\neq0$ из $A$ определено $n(a)\in\mathbb{N}$ т.ч. ($\alpha$) для $a,b\in A, b\neq0$ $\exists x,r\in A: a=xb+r$ и $n(r)<n(b)$ или $r=0$, ($\beta$) $n(ab)=n(a)n(b)$. Пусть $a,b\in A$. Докажите: а) идеалы $aA:=\{ax: x\in A\}$ и $bA$ совпадают $\Leftrightarrow \exists\alpha\in A$ т.ч. $\alpha$ обратим и $a=\alpha b$; б) любой идеал $I\subset A$ <т.е. $x,y\in I, a\in A \Rightarrow x+y\in I, ax\in I$> главный <т.е. $\exists$образующая− $c\in I: I=cA$>; в) $\exists$НОД$(a,b)$ <Определение?>; г) $ab\,\vdots\,p$ и $p$ простое $\Rightarrow a\,\vdots\,p$ или $b\,\vdots\,p$; д) разложение на простые множители единственно; е) $ab=c^n$ и НОД$(a,b)=1 \Rightarrow \exists\alpha,k,m\in A$ т.ч. $\alpha$ обратим и $a=\alpha k^n$, $b=\alpha^{-1}m^n$; ж) необратимый элемент $a\in A$, $a\neq0$ разлагается в произведение простых. <ОТА=д+ж>

4. Верна ли ОТА в а) $\mathbb{R}[x]$; б) $\Gamma$; в) $Э$; г) $K$; д) $\mathbb{Z}[x]$; е) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$; ж) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?

5. (ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ) а) $y^2=x^3-4$ б) $y^2=x^3-1$ в) $y^2=x^3+1$ г) $5^x-1=y^2$ д) $x^2+y^2=z^3$ е) (Лемма ЭЙЛЕРА) $x^2+3y^2=z^3$ <отв: $x=a^3-9ab^2$, $y=3a^2b-9b^3$; ук: 1б+4г>

6. (ТЕОРЕМА ФЕРМА для $n=3$)=АР8.7е <Ук: замена $x=u+v, y=u-v, z=2t$ и 5е>

7. (ПРОСТЫЕ ЧИСЛА) Докажите: а) $\alpha$ просто в $\Gamma \Leftrightarrow \bar\alpha$ тоже; б) простое $p\in\mathbb{Z}$ непросто в $\Gamma \Leftrightarrow \exists$простое $\alpha\in\Gamma: p=\alpha\bar\alpha=N(\alpha)$ в) $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\Gamma: \alpha\not\vdots\, p$ и $N(\alpha)\,\vdots\,p$ г) $\Leftrightarrow -1$ −квадрат в $\mathbb{Z}_p$ д) $\Leftrightarrow p=2$ или $p=4k+1$ <Ук: АР7.10аг>; е) в $K$ и $Э$ верны 7абв. ж) Найдите аналоги 7г,д для $K$ и $Э$ <Ук: ответ в АР7.10в − $p=6k+1$>.

8. Докажите, что в $\mathbb{Z}$ бесконечно много простых вида а) $4k+1$; б) $6k+1$.

9. Докажите, что если НОД$(x,y)=1$, то нечетные делители чисел вида а) $x^2+y^2$ б) $x^2-xy+y^2$ в) $x^2+3y^2$ имеют такой же вид <Ук: начните с простых>.

10. (СУММЫ КВАДРАТОВ) Пусть $M(n)$−число решений в $\mathbb{Z}$ уравнения $x^2+y^2=n$. а) Когда $M(n)\neq0$? Докажите: ~~б) $M(n)=8 \Leftrightarrow n$−простое вида $4k+1$;~~ в) $\frac{1}{4}M(n)$ мультипликативно; г) $M(n)=4(d_+(n)-d_-(n))$, где $d_+(n)$−число делителей $n$ вида $4k+1$ а $d_-$ − вида $4k-1$. Как изменятся а−г для д) $x^2+3y^2=n$; е) $x^2+y^2+z^2+u^2=n$?

11. (ТОЧКИ В КРУГЕ) Докажите: а) число целых точек в круге $|z|\leq\sqrt{a}$ равно $4([a]-[a/3]+[a/5]-[a/7]+[a/9]-\ldots)+1$, где $[x]$− целая часть $x$ <Ук: 10в>; б) (Ряд ЛЕЙБНИЦА) $\pi/4=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$ в) Найдите с помощью 10д число точек в эллипсе $x^2+3y^2=a$ <его площадь $\pi a/\sqrt{3}$> и напишите ряд для $\pi/2\sqrt{3}$.

12. (ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ) Пусть $\zeta_\Gamma(x):=\sum_\alpha N(\alpha)^{-x}$ по всем $\alpha\neq0$ из $\Gamma$. Тогда: $\zeta_\Gamma(x)=$ а) $=\sum_{(a,b)\neq(0,0)}(a^2+b^2)^{-x}=\sum_n M(n)/n^x$ б) (ЭЙЛЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ) $=\prod_\beta 1/(1-N(\beta)^{-x})$, где $\beta$ пробегает по разу простые из $\Gamma$ с точностью до умножения на обратимые; в) $=4\zeta(x)L(x)$ <АР6.10> г) $=[(1-2^{-x})\prod_{p=4k+1}(1-p^{-x})^2\cdot\prod_{p=4k+3}(1-p^{-2x})]^{-1}$. д) Определите дзета-функции колец $K$ и $Э$ и напишите для них формулы аналогичные а−г.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1абвгд | 2абвг | 3абвгдеж | 4абвгдеж | 5абвгде | 6 | 7абвгдеж | 8аб | 9абв | 10абвгде | 11абв | 12абвгд |
| 16 ф. 19 мая | | 23 мая 3.9 3.9 | 23.5 | | | | | | | | |
| 2 Вайтроб | | Вайтр АА_ | Мб | | | | | | | | |