

# ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ

(вопросы отмеченные знаком + образуют дополнительный список, за сдачу которого ставится ОСОБАЯ отметка)

## I. Арифметика целых чисел

- ( $\exists!$  — деления с остатком).
- +1. Евклидовость кольца  $\mathbb{Z}$  ( $\exists!$  деления с остатком).
  - +2. Теорема о главных идеалах.
  - +3. НОД и НОК и их свойства.
  - +4. Алгоритм Евклида.
  - +5. Представимость НОД  $(a, b)$  в виде  $ax+by$ .
  - +6. Решение диофантовых уравнений  $ax+by=c$ .
  - +7. Простые числа. Основная теорема арифметики.
  - 8+ Конечные цепные дроби. Разложимость рациональных чисел в КЦД.
  - 9+ Применение КЦД к решению линейных диофантовых уравнений.
  - 9+ Дзета-функция и эйлерово произведение.

## II. Кольца и поля вычетов

- +1. Кольца вычетов. Теорема:  $\mathbb{Z}_p$  поле тцтк  $p$  — простое.
- +2. Теоремы Ферма и Вильсона.
- 3+ Обратимые элементы в  $\mathbb{Z}_m$ . функция Эйлера. Теорема Эйлера.
- +4. Разложение рациональных чисел в периодическую десятичную дробь. Теорема: период десятичного разложения числа  $1/p$  делит  $p-1$ .
- 5+ Квадраты в  $\mathbb{Z}_p$ . Квадратичные вычеты и невычеты и их свойства.
- 6+ Теорема:  $a \neq 0$  кв. вычет [невычет] в  $\mathbb{Z}_p$  тцтк  $a^{(p-1)/2} = \pm 1$  [ $= -1$ ].

## III. Кольцо многочленов

- +1. Евклидовость ( $\exists!$  деления с остатком) кольца  $k[x]$  ( $k$  — произвольное поле; можно считать, что  $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{Z}_p$ ).
- +2. НОД и НОК двух многочленов. Алгоритм Евклида.
- +3. Теорема о главных идеалах. Представимость НОД  $(f, g)$  в виде  $Af+Bg$ .
- +4. Неприводимые многочлены.  $\exists!$  разложения на неприводимые множители.
- +5. Теорема Безу. Корни многочлена и линейные множители.
- +6. Теорема о равенстве двух многочленов степени  $n$  имеющих равные значения в  $n+1$  точке. Интерполяционная формула Лагранжа.
- 7+ Основная теорема алгебры в  $\mathbb{C}[x]$  (любое доказательство).
- 8. Неприводимые многочлены в  $\mathbb{R}[x]$ . Основная теорема алгебры в  $\mathbb{R}[x]$ .
- 9. Разложение рациональных функций на простейшие дроби.
- +10. Производная многочлена и кратные корни.
- +11. Формула Тейлора для многочленов.
- +12. Симметрические многочлены. Теорема Виета.
- +13. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
- 14+ Основная теорема о симметрических многочленах.
- 15+ Алгебраические числа и их свойства.

## IV. Комбинаторика

- 1. Группа перестановок.
- 2. Четность перестановки и ее свойства.
- +3. Сочетания и их свойства. Бином Ньютона.
- 4+ Производящие функции и их свойства. Производящая функция для числа разбиений.
- 5+ Числа Каталана.

## V. Комплексные числа

- +1. Поле комплексных чисел. Свойства модуля.
- +2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
- +3.  $\exists$  корни  $n$ -й степени. Разрешимость квадратных уравнений.
- +4. Показательная функция в  $\mathbb{C}$ . Логарифмы и их свойства.
- +5. Тригонометрические функции в  $\mathbb{C}$  и их обратные.
- 6+ Кольцо  $\mathbb{Z}[i]$  гауссовых чисел. Его евклидовость.
- 7+ Простые в  $\mathbb{Z}[i]$ . Суммы двух квадратов.

## VI. Линейная алгебра

- +1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Существование ненулевого решения у однородной системы из  $n$  уравнений с  $n+1$  неизвестным.
- +2. Векторные пространства. Линейная независимость; базис; размерность.
- 3+ Подпространства. Пересечение и сумма подпространств; их размерности.

## VII. Общая алгебра

- 1. Группа, подгруппа. Теорема: порядок элемента = порядок порожденной им подгруппы.
- 2+ Теорема Лагранжа и следствия из нее.
- 3. Изоморфизм групп. Теорема: группа простого порядка  $p$  изоморфна  $\mathbb{Z}_p$ .
- 4. Кольца и поля. Делители нуля, обратимые элементы. Теорема: конечное кольцо без делителей нуля — поле.
- 5+ Делимость в кольцах. Евклидовы кольца и ОАрифметики.
- 6+ Простые поля. Характеристика поля. Автоморфизм Фробениуса.
- 7+ Расширения полей. Степень расширения. Присоединение корня.
- 8+ Конечные поля.
- 9+ Неразрешимость классических задач об удвоении куба и трисекции угла.

## БИЛЕТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ.

### Билет N 1.

1. Аксиомы планиметрии.
2. Свойства плоских углов выпуклого многогранного угла.
3. Задача.

### Билет N 2.

1. Признаки равенства треугольников. +
2. Перпендикулярность прямой и плоскости. †  
Теорема о трех перпендикулярах.
3. Задача.

### Билет N 3.

1. Касательная к окружности. Касающиеся окружности.
2. Построения в пространстве (прямая, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости; плоскости, параллельной данной плоскости).  
Теорема о пересекающихся плоскостях, проходящих через две параллельные прямые.
3. Задача.

### Билет N 4.

1. Подobie. Признаки подобия треугольников. +
2. Перпендикулярность плоскостей в пространстве.
3. Задача.

### Билет N 5.

1. Углы на плоскости. Перпендикулярные прямые. +?
2. Декартовы координаты в пространстве. Угол между векторами. Расстояние между двумя точками. Уравнение плоскости.
3. Задача.

### Билет N 6.

1. Помотетия окружностей.
2. Аксиомы стереометрии. Основные свойства. †
3. Задача.

### Билет N 7.

1. Инверсия. Образы окружности и прямой при инверсии.
2. Необходимое и достаточное условия параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей. Признак и свойство скрещивающихся прямых.
3. Задача.

### Билет N 8.

1. Признаки параллельности прямых на плоскости. †
2. Тела вращения. Уравнение сферы. Плоскость, касательная к сфере.
3. Задача.

### Билет N 9.

1. Площадь многоугольной фигуры. Теорема существования (без доказательства) и единственности.
2. Угол между плоскостями. Площадь ортогональной проекции.
3. Задача.

### Билет N 10.

1. Теорема Пифагора. Неравенство треугольника. †
2. Площади поверхностей.
3. Задача.

### Билет N 11.

1. Геометрические места точек (серединный перпендикуляр к отрезку, биссектриса угла, дуга окружности). Построения на плоскости. †
2. Многогранники. Призна, параллелепипед, пирамида. Правильные пирамиды и призмы. Правильные многогранники.

3. Задача.

Билет N 12.

1. Декартовы координаты на плоскости. Уравнение прямой. Уравнение окружности. +
2. Построения в пространстве (прямой, перпендикулярной данной плоскости; плоскости, перпендикулярной данной прямой; плоскости, параллельной двум, прямым).
3. Задача.

Билет N 13.

1. Классификация движений плоскости. Т. Шаля +
2. Объем многогранных фигур. Теорема существования (без доказательства) и единственности.
3. Задача.

Билет N 14.

1. Эллипс. Вывод канонического уравнения эллипса. Эллипс как сечение цилиндра плоскостью. Свойство фокальных радиусов эллипса. 7
2. Преобразование фигур в пространстве. Учебник или Работы Штейнера?
3. Задача.

Билет N 15.

1. Векторы на плоскости. Скалярное произведение.
2. Объемы тел вращения. Принцип Кавальери.
3. Задача.

Билет N 16.

1. Теоремы синусов и косинусов. Пять формул площади треугольника. +
2. Параметрические уравнения прямой.
3. Задача.

Билет N 17.

1. Вписанные и описанные четырехугольники. ±
2. Свойства параллельных проекций.
3. Задача.

Билет N 18.

1. Выпуклые многоугольники. Длина окружности и площадь круга.
2. Транзитивность параллельности прямых в пространстве.
3. Задача.

Билет N 19.

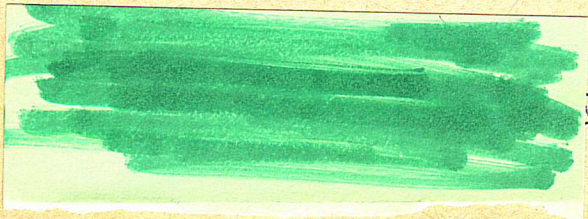
1. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Свойство фокальных радиусов гиперболы. Парабола. Каноническое уравнение параболы.
2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
3. Задача.

Билет N 20.

1. Конкурентность серединных перпендикуляров, высот, биссектрис, медиан треугольника. Прямая Эйлера. +
2. Перпендикуляр и наклонная. Теорема об угле прямой с плоскостью. +
3. Задача.

Билет N 21.

1. Параллелограмм. Свойства и признаки. Ромб, прямоугольник. Теорема Фалеса. +
2. Геометрическое место середин отрезков с концами на скрещивающихся прямых. +
3. Задача.



ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО АНАЛИЗУ

1. Поле действительных чисел. Аксиома об отсутствии дырок. Существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества.
2. Принцип вложенных отрезков. Несчетность множества действительных чисел.
3. Предел последовательности. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности.
4. Предел суммы, разности, произведения и частного последовательностей.
5. Число  $e$ .
6. Ряды. Необходимое условие сходимости. Сходимость рядов  $\sum x^n$  и  $\sum 1/n^2$ .
7. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
8. Признаки сходимости Даламбера и Коши.
9. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся ряды.
10. Открытые и замкнутые множества. Строение открытых множеств на прямой.
11. Компактные множества. Лемма Гейне-Бореля.
12. Непрерывность функции. Эквивалентность определений непрерывности по Коши и Гейне.
13. Непрерывность алгебраических операций и композиции функций.
14. Теорема о промежуточном значении. Непрерывность обратной функции.
15. Показательная и логарифмическая функции и их свойства.
16. Ограниченность непрерывной на отрезке функции и достижение максимума.
17. Предел функции в точке и его свойства. Предел функции  $\sin x/x$  при  $x \rightarrow 0$ .
18. Пределы функций  $\ln(1+x)/x$  и  $(e^x - 1)/x$  при  $x \rightarrow 0$ .
19. Производная. Равенство  $f(x+h) = f(x) + Ah + o(h)$ . Непрерывность дифференцируемой функции.
20. Производная сложной и обратной функции.
21. Производная суммы, разности, произведения, частного двух функций.
22. Производные основных элементарных функций:  $\sin x, \cos x, \ln x, e^x, x^n$ .
23. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа.
24. Критерий монотонности функции. Достаточное условие экстремума.
25. Производная и неравенства. Разложение функций  $\sin x, \cos x, e^x$  в степенной ряд.
26. Формула Тейлора.

Вопросы к экзамену.

( Стереометрия 9 ).

1. Основные понятия и аксиомы стереометрии.
2. Основные следствия из аксиом.
3. Параллельность прямой и плоскости. Необходимое и достаточное условие.
4. Параллельные прямые в пространстве. Два теоремы о параллельных прямых.
5. Транзитивность параллельности прямых в пространстве.
6. Параллельные плоскости. Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей.
7. Два теоремы о параллельных плоскостях.
8. Скрещивающиеся прямые. Необходимое и достаточное условие.
9. Существование и единственность двух параллельных плоскостей, проходящих через две скрещивающиеся прямые.
10. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых.
11. Параллельные проекции. Свойства параллельного проектирования.
12. Построение сечений. Аналог теоремы Менелая.
13. Направление в пространстве. Параллельный перенос пространства. Векторы в пространстве. Угол между прямыми.
14. Действия над векторами.
15. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Перпендикулярные прямые.
16. Перпендикулярность прямой и плоскости. Необходимое и достаточное условие.
17. Два перпендикуляра к одной плоскости. Две плоскости, перпендикулярные к одной прямой.
18. Построение перпендикуляра к плоскости. Построение плоскости, перпендикулярной к данной прямой.
19. Расстояние между прямыми в пространстве.
20. Наклонные и ортогональные проекции. Теорема о трех перпендикулярах.
21. Угол прямой с плоскостью. Теорема об угле прямой с плоскостью.
22. Угол между плоскостями. Площадь ортогональной проекции.
23. Перпендикулярные плоскости. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.
24. Сфера. Сечения сферы. Касательная плоскость к сфере.
25. Сфера, описанная около пирамиды. Необходимое и достаточное условие. Понятие о вписанной сфере.
26. Правильная пирамида. Элементы правильных пирамид.