Инварианты

1. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) приняло участие 100 человек. Сколько было сыграно матчей, прежде чем был определён победитель?

2. В ящик положили 3 меньших ящика. Затем в некоторые из них также положили по 3 ещё меньших ящика, и так далее. В конце концов оказлось 17 заполненных ящиков (внутри которых есть другие ящики). Сколько в этот момент пустых ящиков?

3. По окружности расположено 20 плюсов и 20 минусов. Доказать, что пар соседних плюсов столько же, сколько пар соседних минусов.

4. На доске выписаны числа $1, 2, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать число (а) $a + b - 1$; (б) $a + b + ab$. Какое число может остаться после 19 таких операций?

5. Любую вершину треугольника можно сдвигать по проходящей через нее прямой, параллельной противоположной стороне. Можно ли такими операциями сделать из равностороннего треугольника со стороной 1 прямоугольный треугольник с катетами, равными 1?

6. У числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ вычислили сумму цифр, у полученного числа также вычислили сумму цифр и так далее, пока не осталось однозначное число. Что это за число?

7. В ряд стоят 6 сосен и на каждой сидит чиж. Каждую минуту два чижа (на одной или разных соснах) перелетают на соседнюю сосну — один направо, другой налево. Могут ли чижи собраться на одной сосне?

8. (Продолжение) А если сосны стоят по кругу, и один из чижей летит по часовой стрелке, а другой — против?

9. (Продолжение) А если в ряд стоят 4 сосны, на которых сидят 1, 2, 3, 4 чижа, на какой сосне они смогут собраться?

10. В строчку написаны 10 чисел, причём сумма любых трёх соседних равна 15. Первое число равно 7. Чему может быть равно последнее число?

11. В мешке лежит 57 чёрных фасолин и 33 белых. Борис Михайлович вынимает из мешка наугад две фасолины. Если они оказываются одного цвета, то он заменяет их на белую фасолину, если разного — то на чёрную. Так он делает до тех пор, пока в мешке не останется только одна фасолина. Какого цвета она будет?

К любым двум числам последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ разрешается одновременно прибавить или отнять по единице. Можно ли несколькими такими операциями сделать все числа равными?

Стоят 57 стаканов вверх дном. За ход разрешается перевернуть любые (а) 5; (б) 6 стаканов. Можно ли за несколько ходов поставить стаканы вниз дном?

В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно принимают окраску третьего цвета (например, при встрече серого и бурого хамелеона оба становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

На каждой клетке доски 9×9 сидит жук. В какой-то момент каждый жук переполз на одну из соседних клеток. Докажите, что после этого хотя бы одна клетка стала пустой.

На шахматной доске 9×9 стояли 9 ладей, не бьющих друг друга. В какой-то момент каждая ладья сделала ход коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

К задаче 3: Надо предложить сформулировать более общее утверждение: пусть догадаются, что разность числа тех и других пар равна разнице между число плюсов и числом минусов. Это более утверждение доказывается легко: обе части возрастают на 1 при добавлении плюса и убывают при добавлении минуса.

Графы

1. В углах доски 3×3 стоят шахматные кони — два чёрных и два белых [i]. (а) Можно ли поменять чёрных и белых коней местами? [ii] (б) Можно ли поменять одного чёрного коня с одним белым? [iii] (в) Если можно (в предыдущих пунктах), какое минимальное число ходов для этого необходимо?

Ч		Ч
Б		Б

[i]

Б		Б
Ч		Ч

[ii]

Ч		Б
Б		Ч

[iii]

2. Выписать в ряд цифры от 1 до 9 (каждую по разу) так, чтобы любые две подряд идущие цифры давали бы двузначное число, делящееся на 7 или на 13.

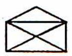
3. Каждый из учеников класса подсчитал, сколько у него в классе друзей (не считая себя). Полученные числа сложили. Получилось нечётное число. Доказать, что кто-то из школьников числит среди своих друзей человека, который не считает его своим другом.

4. Доказать, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Считается, что если А знаком с Б, то Б знаком с А.)

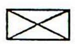
5. Нарисовано несколько точек. Некоторые из них соединены линиями. (Такую картинку называют *графом*, точки называют *вершинами*, линии — *рёбрами*.) Известно, что граф *связен*, то есть из любой вершины можно пройти в любую, идя по рёбрам. Доказать, что (число рёбер) $\geqslant$ (число вершин) $- 1$.

6. (Продолжение) Доказать, что если число рёбер не меньше числа вершин, то граф имеет *цикл*: можно найти замкнутый путь, проходящий по рёбрам, и не проходящий два раза по одному ребру.

7. Можно ли нарисовать открытый конверт [i] и закрытый конверт [ii], не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному участку линии дважды?



[i]



[ii]

8. Каждый из 20 школьников решил 2 из 20 задач, причём каждую задачу решили ровно два школьника. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и чтобы все задачи были рассказаны.

Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли её обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом по одному разу и вернуться на исходное поле?

Имеется кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, сделать из него каркас куба со стороной 10 см? И если нельзя, то в скольких местах придётся эту проволоку сломать?

Имеется группа островов, соединённых мостами. Турист побывал на всех островах, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист (а) не с него начал и не на нём закончил? (б) с него начал, но не на нём закончил? (в) с него начал и на нём закончил?

Что можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одной линии дважды, а что нет?

В связном графе число вершин ровно на единицу больше числа рёбер. Доказать, что в нём нет циклов.

На доске отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: белым, синим или красным. Докажите, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника.

Некоторые из 9 школьников подрались. Докажите, что найдутся либо три такие школьника, что каждый подрался с каждым, либо четыре школьника, между которыми не было драк.

Имеется связный граф. Доказать, что можно удалить одну из его вершин (и все входящие в неё ребра), не нарушив его связности.

В первых двух задачах достаточно нарисовать граф, чтобы решение стало очевидным. Ответ во второй: 784913526. (Их решение есть в книжке «Как решают нестандартные задачи».)

Чуть более сложная ситуация в дополнительной задаче 1, где также надо нарисовать граф ходов коней, и тогда нетрудно найти искомый путь.

Задача 3 уже была в разделах про индукцию и про чётность, в несколько иной форме.

Обсуждая задачу 4, полезно переформулировать её в таком виде: в полном графе с 6 вершинами рёбра раскрашены в два цвета; доказать, что есть одноцветный треугольник. Это — простейший вариант теоремы Рамсея; следующий по сложности случай рассматривается в дополнительной задаче 6. В дополнительной задаче 7 те же соображения комбинируются (довольно искусственным образом) с соображениями чётности.

В задачах 5 и 6 ключевое понятие в решении — связная компонента. Добавление ребра уменьшает число связных компонент на 1 или даёт цикл (при неизменном числе компонент).

Продолжает тему дополнительная задача 5. (Вообще максимальное число «линейно независимых» циклов на единицу меньше разности между числом вершин и рёбер.)

Обсуждая задачу 7, можно спросить, где в случае открытого конверта может начинаться и кончаться путь.

Эта же идея развивается в дополнительных задачах 2, 3, 4. В последней предлагается найти общий критерий. (Ответ: картинка должна быть связной и иметь не более двух точек нечётной степени.)

Сравнения

Говорят, что числа a и b *сравнимы по модулю* m, если их разность делится на m. (Числа предполагаются целыми; мы считаем, что модуль m больше 0.) Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$.

1. Доказать, что $a \equiv b \pmod{m}$ в том и только том случае, когда a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

2. Найти положительное целое число, которое сравнимо с -1 по любому из модулей $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

3. Доказать, что сравнения по одному модулю можно складывать и перемножать: если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ и $ac \equiv bd \pmod{m}$.

4. Доказать, что если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

5. Доказать, что $a^n \equiv b^n \pmod{(a-b)}$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (и при любых $a \neq b$).

6. Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 3, 5 и 7?

7. Найти остатки от деления 16^{101} и 18^{101} на 17.

8. Доказать, что четырёхзначное число $\overline{abcd}$ сравнимо с $a + b + c + d$ по модулю 9 и с $-a + b - c + d$ по модулю 11.

9. Известно, что $7a \equiv 3 \pmod{13}$. Найти остаток от деления a на 13. (Сколько есть возможностей?)

10. Известно, что $8a \equiv 4 \pmod{14}$. Найти остаток от деления a на 14. (Сколько есть возможностей?)

11. Доказать, что $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99} + 6^{99}$ делится на 7.

12. Доказать, что если $ac \equiv bc \pmod{mc}$, то $a \equiv b \pmod{m}$.

13. Найти остаток от деления $(n^2 - 1)^{101}(n+1)^{100}$ на n.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Арифметика остатков

1. Составить таблицу сложения для остатков по модулю 11. (Такая таблица состоит из 11 строк и 11 столбцов, пронумерованных от 0 до 10. В m-ой клеточке n-ой строки стоит остаток от деления суммы двух чисел, дающих остатки m и n.) Верно ли такое утверждение: в каждой строке и каждом столбце встречаются все остатки ровно по одному разу?

2. Решить ту же задачу для умножения. (В этом случае в таблице будет нулевая строка и нулевой столбец.)

3. Решить те же задачи для сложения и умножения по модулю 7 и 10.

4. Какие числа и по скольку раз встречаются на диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний) таблиц сложения и умножения по модулям 7, 11, 17 и 19?

5. В последовательности $1, 2, 5, 8, 11, \ldots$ каждое следующее число на 1 больше суммы цифр квадрата предыдущего числа. Какое число стоит на 100-м месте?

6. Последовательность остатков от деления a, $2a$, $3a$, ... на 12 (каждый член получается прибавлением a по модулю 12) периодична (при любом a от 0 до 11). Почему? Какие периоды тут встречаются (при различных a)?

7. Тот же вопрос при делении на 11. Какие периоды тут возможны?

8. Последовательность остатков от деления a, a^2, a^3, a^4, ... на 11 (каждый член получается умножением на a по модулю 11) периодична при любом a от 0 до 10. Почему? Какие периоды тут возможны?

9. В последовательности Фибоначчи $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ каждый член равен сумме двух предыдущих. Заменив каждое число остатком от деления его на 11, мы получим последовательность, в который каждый член равен сумме двух предыдущих по модулю 11. Доказать, что эта последовательность периодична, и найти период.

10. Будет ли периодична аналогичная последовательность, если 11 заменить на 13? Каков будет её период?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10